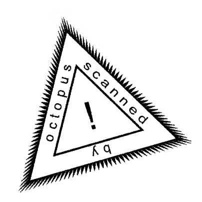
ИСТОРІЯ ГЕОМЕТРІИ

соч. Шаля.

ПЕРЕВОДЪ СЪ ФРАНЦУЗСКАГО.

Томъ II.

ПРИМѢЧАНІЯ.



ПРИМѢЧАНІЯ

ПРИМѢЧАНІЕ I.

(Первая эпоха nº 5).

О улиткообразныхъ линіяхъ Персея. Мѣсто изъ Герона Александрійскаго, относящееся къ этимъ кривымъ.

Имя геометра Персея упоминается только однимъ писателемъ, именно Прокломъ въ его комментаріи на первую книгу Евклида. Но не въ одномъ только этомъ памятникѣ древней науки говорится о *улиткообразныхъ линіяхъ* (*lignes spiriques*, спирическія линіи), какъ думали, кажется, до сихъ поръ. Въ одномъ весьма древнемъ сочиненіи Герона Александрійскаго, которое было воспроизведено въ 1571 и 1579 годахъ Конрадомъ Дасиподіемъ [1]) подъ заглавіемъ: «*Nomenclatura vocabulorum geometricorum*», мы находимъ весьма точное опредѣленіе *спиры* (spire), т. е. кольцеобразной поверхности, и различныхъ видовъ этой поверхности, *сѣченія которой суть кривыя, обладающія особыми свойствами.* Это мѣсто изъ Герона слѣдующее: *Speira fit quando circulus aliquis centrum habens in circulo et erectus existens, ad planum ipsius circuli fuerit circumductus, et revertatur iterum unde coeperat moveri; illud ipsum figurae genus nominatur* κρίκος *orbis. Discontinua autem speira est, quae dissoluta est, aut dissolutionem habet.*

---

[1]) *Euclidis Elementorum liber primus.* Item *Heronis Alexandrini vocabula quaedam Geometrica, antea nunquam edita*; graece et latine per Conradum Dasypodium. Argentinae 1571, in 8.

Oratio C. Dasypodii *de Disciplinis mathematicis.* Ejusdem *Heronis Alexandrini Nomenclaturae Vocabulorum geometricorum translatio*; ejusdem *Lexicon mathematicum, ex diversis collectum antiquis scriptis.* Argentinae 1579, in 8.

Continua vero, quae uno in puncto concidit. Diminutionem habens est, quando circulus qui circumducitur, ipsemet seipsum secat. Fiunt autem et harum sectiones, lineae quaedam proprietatem suam habentes.

Мѣсто объ улиткообразныхъ линіяхъ у Прокла нѣсколько подробнѣе и имѣетъ еще то преимущество, что въ немъ названо имя изобрѣтателя этихъ кривыхъ. Греческій текстъ этого мѣста воспроизведенъ Кетле (Quetelet) и помѣщенъ вмѣстѣ съ переводомъ въ весьма любопытной и достойной вниманія замѣткѣ его о *спирическихъ линіяхъ* (lignes spiriques). Эта замѣтка напечатана въ видѣ предисловія къ увѣнчанному Брюссельскою академіею въ 1824 году мемуару Пагани объ этихъ линіяхъ и также въ *Correspondance mathématique* par Quetelet, t. II, p. 237.

Эти *спирическія линіи* ввели въ заблужденіе почти всѣхъ писателей, говорившихъ объ нихъ: одни смѣшивали ихъ со *спиралями*; другіе относили изобрѣтателя ихъ къ позднѣйшему, чѣмъ слѣдуетъ, времени.

Рамусъ (Ramus) въ *Scholis mathematicis* помѣщаетъ этого геометра послѣ Герóна и Гемина.

Дешаль (Dechales) помѣщаетъ его также послѣ Гемина и приписываетъ этому послѣднему *спирическія линіи*, а Персея дѣлаетъ изобрѣтателемъ спиралей [2]).

У Бланкана (Blancanus) встрѣчаемъ странное противорѣчіе. Онъ говоритъ, что Персей родился послѣ Гемина, ему приписываетъ открытіе спирическихъ линій, и, не смотря на это, говоритъ, что Геминъ писалъ объ этихъ же линіяхъ [3]).

Воссій (G. J. Vossius) помѣщаетъ Персея между Ѳалесомъ и Пиѳагоромъ и приписываетъ ему спирали [4]).

Бернардинъ Бальди (Baldi) относитъ Персея ко времени рожденія Архимеда и Аполлонія (250 до Р. Х.) и, по Проклу, совер-

---

[2]) *Cursus mathematicus*, t. I, de progressu matheseos, p. 8.

[3]) *De natura mathematicarum scientiarum tractatio, atque clarorum mathematicorum chronologia.* Bononiae 1615, in 4.

[4]) *De universae matheseos natura et constitutione liber; cui subjungitur chronologia mathematicorum.* Amstelodami 1660, in 4.

шенно точно опредѣляетъ открытыя Персеемъ улиткообразныя линіи [5]).

Геильброннеръ (Heilbronner) впадаетъ въ ту же ошибку, какъ Воссій и Дешаль, относительно кривыхъ Персея, но, какъ кажется, указываетъ настоящее время существованія этого геометра [6]). Онъ помѣщаетъ его между Аристеемъ и Менехмомъ. Ему, по нашему мнѣнію, слѣдуетъ приписать именно эту древность.

Монтукла относитъ его къ болѣе позднему времени. Онъ помѣщаетъ его въ двухъ первыхъ столѣтіяхъ христіанскаго лѣтоисчисленія. Нельзя, кажется, сомнѣваться, что это ошибочно, если принять въ соображеніе вышеприведенное мѣсто изъ Герона и мѣсто у Прокла, гдѣ сказано, что Геминъ писалъ объ улиткообразныхъ.

Монтукла думалъ, что до него всѣ смѣшивали *спирическія линіи* со *спиралями* Архимеда, и что онъ первый показалъ значеніе этихъ кривыхъ [7]). Но изъ предыдущаго видно, что Дешаль, Воссій и Геильброннеръ дѣйствительно впали въ эту ошибку, но Бальди и Бланканъ не сдѣлали ея. Два другіе писателя также опредѣлили совершенно точно значеніе улиткообразныхъ. Первый—Дасиподій, который въ своемъ сочиненіи *Definitiones et divisiones Geometriae* [8]) нѣсколько разъ говоритъ объ этихъ кривыхъ. Другой — это ученый Савилій, который въ *Praelectiones tredecim in principium elementorum Euclidis* (Oxonii 1621, in 4) перечисляетъ извѣстныя древнимъ кривыя и приводитъ слово въ слово то мѣсто Прокла, гдѣ показывается образованіе улиткообразныхъ линій.

---

5) *Cronica de' Matematici overo Epitome dell' istoria delle vite loro.* In Urbino, 1707, in 4. «*Perseo, non si sà bene di qual patria si fuisse. Fu egli, come s'ha da Proclo, inventore delle linee spiriche, le quali nascono dalle varie settioni delle spira.*» (p 25).

6) *Historia matheseos universae.* Lipsiae 1742, in 4.

7) *Histoire des mathématiques*, t. I, p. 316.

8) *Lexicon mathematicum, ex diversis collectum antiquis scriptis*; это часть вышеупомянутаго сочиненія, изданнаго въ 1579 году.

Speiricae sectiones ita se habent, ut altera sit incurvata, implicata similis caudae equinae. Altera vero in medio quidem est latior; ex utraque vero parte deficit. Est etiam alia, quae oblonga cum sit, in medio, intervallo utitur minore; sed ex utraque parte dilatatur.

ПРИМѢЧАНІЕ II.

(*Первая эпоха n⁰ 8*)

О мѣстахъ на поверхности Евклида.

Монтукла на 172 страницѣ перваго тома *Histoire des mathématiques* говоритъ, что *мѣста на поверхности* (τόποι πρός ἐπιφάνειαν) Евклида суть *поверхности*, а на страницѣ 215 того же тома,—что это *кривыя двоякой кривизны*, образуемыя на кривыхъ поверхностяхъ, какъ напримѣръ винтовая линія на кругломъ цилиндрѣ. Очень можетъ быть, что древніе обозначали этимъ словомъ вообще поверхности и проводимыя на нихъ кривыя. Но что же такое были именно *Loca ad superficiem* Евклида? Для рѣшенія этого вопроса мы не имѣемъ другихъ указаній, кромѣ четырехъ леммъ Паппа, относящихся къ этому сочиненію; такъ какъ въ этихъ леммахъ говорится только о коническихъ сѣченіяхъ, то мы думаемъ, что Евклидъ разсматривалъ исключительно поверхности, называемыя теперь *поверхностями втораго порядка*. Мы думаемъ даже, что здѣсь должно разумѣть только *поверхности вращенія*. Потомучто съ одной стороны извѣстно, что поверхности вращенія втораго порядка изучались древними еще до Архимеда: это видно изъ слѣдующихъ словъ, сказанныхъ въ концѣ 12-й теоремы книги о *сфероидахъ и коноидахъ* при выводѣ свойствъ ихъ плоскихъ сѣченій: «доказательства всѣхъ этихъ предложеній извѣстны»; съ другой стороны мы замѣчаемъ, что послѣдняя лемма Паппа выражаетъ главное свойство фокусовъ и директрисъ коническаго сѣченія. По всей вѣроятности эта теорема служила для доказательства, что мѣсто точекъ, разстоянія которыхъ онъ неподвижной точки и отъ данной плоскости находятся въ постоянномъ отношеніи, есть сфероидъ или коноидъ; или же для доказательства, что сѣченіе этого мѣста плоскостію, проходящею чрезъ неподвижную точку, есть коническое сѣченіе, для котораго эта точка есть фокусъ, а прямая пересѣченія плоскости кривой съ данною плоскостью—директриса.

На основаніи этого мы полагаемъ, что *Loca ad superficiem* Евклида были поверхности вращенія втораго порядка и также кривыя, получаемыя отъ пересѣченія плоскостію какъ этихъ поверхностей, такъ и конуса.

ПРИМѢЧАНІЕ III.

(*Первая эпоха n⁰ 8*).

О поризмахъ Евклида.

Мы обязаны Р. Симсону возстановленіемъ особой формы, свойственной предложеніямъ, называвшимся у древнихъ *Porismata*, и разъясненіемъ нѣкоторыхъ изъ нихъ но неполнымъ указаніямъ Паппа. Въ разныхъ мѣстахъ своего сочиненія Симсонъ воспроизводитъ также и 38 леммъ, заключающихся въ *Collectiones mathematicae* и относящихся къ *Porismata*, съ доказательствами очень часто упрощенными и пополненными; здѣсь же онъ приводитъ доказательства пяти теоремъ, превращенныхъ Ферматомъ въ поризмы, и еще многихъ весьма общихъ предложеній о кругѣ, найденныхъ Стевартомъ и представляющихъ настоящія поризмы.

Но намъ кажется, что Симсонъ не затронулъ еще многихъ другихъ вопросовъ, рѣшеніе которыхъ необходимо для полнаго разъясненія ученія о поризмахъ. У него не объяснено напримѣръ, какою мыслію руководствовался Евклидъ, представляя свое сочиненіе въ такой необычной формѣ; въ какомъ отношеніи это сочиненіе заслуживало того предпочтенія, которое даетъ ему Паппъ; какими способами и дѣйствіями замѣнилось ученіе о поризмахъ въ новой наукѣ; и наконецъ, какъ удовлетворительно объяснить нѣкоторыя мѣста о поризмахъ у Паппа и опредѣленіе ихъ у Прокла. Однимъ словомъ, мы хотимъ сказать, что ученіе о поризмахъ, ихъ происхожденіе, т. е. разумная цѣль, вызвавшая ихъ, ихъ опредѣленіе, употребленіе, приложенія и то, что замѣнило ихъ въ новѣйшихъ ученіяхъ,—все это—тайны, нисколько не разгаданныя въ трудѣ Симсона. Къ этому нужно прибавить, что имъ возстановлено только шесть изъ тридцати поризмъ, приводимыхъ Паппомъ.

По нашему мнѣнію, нѣкоторая тьма еще лежитъ на этомъ вопросѣ, доставшемся намъ въ наслѣдіе отъ древняго міра, если только для разъясненія его несуществуетъ другихъ неизвѣстныхъ намъ сочиненій, и если мы вправѣ счесть себя достаточно проницательными, чтобы понимать сочиненіе Симсона.

Размышленія объ этомъ предметѣ долгое время занимали насъ исключительно и часто отвлекали отъ занятій, которымъ мы хотѣли себя посвятить: интересъ былъ сильнѣе воли. Такимъ образомъ мы составили себѣ нѣкоторыя представленія объ ученіи о поризмахъ и возстановили 24 выраженія Паппа, не затронутыя Симсономъ. Здѣсь мы предлагаемъ краткій разборъ нашей работы, разсчитывая при этомъ на снисхожденіе читателей; понятно, что къ подобному изслѣдованію, составлявшему предметъ живыхъ стремленій величайшихъ геометровъ, мы приступаемъ съ чувствомъ страха и недовѣрія, возбуждаемымъ въ насъ сознаніемъ нашей слабости.

При недостаткѣ документовъ, помощію которыхъ было бы возможно вполнѣ возстановить ученіе о поризмахъ аналитическимъ путемъ, мы принуждены, такъ сказать, составить вновь это ученіе *a priori*, путемъ чистаго синтеза. При этомъ оно должно быть построено на всѣхъ данныхъ и должно быть подвергнуто всѣмъ испытаніямъ, которыя только могутъ быть извлечены изъ сохранившихся до нашего времени отрывковъ.

Понятіе о *Porismata* слѣдуетъ производить, какъ намъ кажется, изъ понятія о *Data*, и, по нашему мнѣнію, таково было его происхожденіе въ сознаніи самого Евклида.

Porismata были то же самое по отношенію къ *мѣстамъ*, что были *Data* по отношенію къ простымъ теоремамъ *элементовъ*; такъ что поризмы и данныя составляли дополненія къ элементамъ геометріи, служившія для облегченія примѣненій ихъ къ рѣшенію задачъ [9]).

---

[9]) Здѣсь позволяемъ себѣ сдѣлать одно замѣчаніе, на которое мы не рѣшались, когда говорили о *Data* Евклида.

Хотя и трудно разгадать смыслъ поризмъ, оставленныхъ Паппомъ, но тотчасъ видно, что въ этихъ предложеніяхъ нѣчто отыскивается. Паппъ, подобно тому, какъ и Евклидъ въ книгѣ Δεδόμενα, означаетъ это искомое сло-

Съ этой точки зрѣнія главное назначеніе *поризмъ* заключается въ томъ, что онѣ ведутъ къ познанію *мѣстъ*, доставляя средство изъ условій, опредѣляющихъ искомое мѣсто, выводить другія, яснѣе указывающія его видъ и положеніе.

Если, напримѣръ, мы ищемъ мѣсто точки, для которой квадраты ея разстояній отъ двухъ неподвижныхъ точекъ, умноженные соотвѣтственно на два постоянныя количества, имѣютъ постоянную сумму; то мы докажемъ, что существуетъ неподвижная точка, разстояніе которой отъ всѣхъ точекъ, удовлетворяющихъ вопросу, постоянно; потомъ изъ данныхъ вопроса опредѣлимъ положеніе этой неподвижной точки и величину постояннаго разстоянія.

Такимъ образомъ получится поризма, которая показываетъ, что мѣсто искомой точки есть окружность.

Этотъ примѣръ показываетъ, въ чемъ состояло употребленіе поризмъ. Собраніе поризмъ заключало въ себѣ рядъ различныхъ признаковъ и опредѣленій кривыхъ линій (въ книгѣ Евклида только прямой линіи и круга); это былъ сводъ преобразованій ихъ различныхъ свойствъ; поэтому поризмы въ смыслѣ Евклида были въ нѣкоторомъ родѣ *уравненіями* кривыхъ линій. Ими достигалась простота и удобство способовъ координатъ, (разумѣя подъ этимъ словомъ всевозможные способы выражать кривую посредствомъ двухъ или многихъ перемѣнныхъ).

Ученіе о поризмахъ было такимъ образомъ *аналитическою геометріею* древнихъ; и если бы оно дошло до насъ, мы можетъ быть усмотрѣли бы въ немъ зачатки Декартова ученія. Мы думаемъ по крайней мѣрѣ, что уравненіе прямой линіи заключалось въ поризмахъ Евклида, конечно не въ алгебраической формѣ, въ

вомъ δεδόμενον и прилагаетъ его же ко всему, что дѣйствительно должно считать даннымъ на основаніи условій вопроса. Выраженія Паппа сдѣлались бы понятнѣе, еслибы только въ послѣднемъ случаѣ употреблять слово данныя, а величины, которыя нужно еще найти, называть опредѣленными.

Это замѣчаніе прилагается также и къ сочиненію «данныя» Евклида, но только занимаясь разъясненіемъ поризмъ я почувствовалъ неудобство обозначенія однимъ и тѣмъ же словомъ двухъ различныхъ понятій.

которой мы пользуемся имъ теперь. Для примѣра нами приведена въ текстѣ одна изъ такихъ поризмъ. Въ другой разъ мы подтвердимъ это мнѣніе многими доказательствами. И если эти первыя соображенія наши не покажутся лишенными всякой вѣроятности, то мы можетъ прибавить, что Евклиду недоставало только употребленія алгебры, чтобы создать систему координатъ, появляющуюся только со времени Декарта.

Вотъ общая задача, для которой, какъ намъ кажется, Евклидъ назначалъ свои поризмы:

«Геометрическое мѣсто дано посредствомъ общаго построенія всѣхъ его точекъ, или посредствомъ извѣстной системы координатъ; требуется найти другое построеніе, или другую систему координатъ, которымъ удовлетворяли бы всѣ точки этого мѣста и изъ которыхъ можно бы было узнать его видъ и положеніе».

Согласно съ содержаніемъ этой общей задачи, цѣль поризмъ заключалась въ томъ, чтобы облегчить преобразованія построеній или координатъ, принадлежащихъ всѣмъ точкамъ кривой; и сочиненіе Евклида было собраніемъ формулъ, служившихъ для достиженія этой цѣли.

Поэтому Проклъ справедливо говоритъ, что въ поризмахъ дѣло идетъ о *нахожденіи нѣкотораго искомаго, которое ищется и разсматривается не само для себя*. Въ самомъ дѣлѣ, въ нихъ ищутся новые способы построенія, или новыя координаты, только какъ вспомогательныя средства для главной задачи, т. е. для изученія и изслѣдованія кривыхъ.

Поризмы, заключавшіяся въ трехъ книгахъ Евклида, представляли собраніе формулъ, служившихъ для построенія мѣстъ, именно для прямой линіи, точки и круга. Это были извѣстные въ то время, или найденные Евклидомъ, способы выражать различныя построенія этихъ трехъ мѣстъ помощію двухъ, извѣстнымъ образомъ связанныхъ, координатъ и переходить отъ одного изъ построеній къ другому.

Онѣ имѣли также цѣлію приводить къ одному и тому же построенію, или къ одной и той же системѣ координатъ, различныя части фигуры, образуемыя, вслѣдствіе условій задачи, различными

построеніями, или координатами, — дѣйствіе, которое въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ сходно съ приведеніемъ многихъ численныхъ или буквенныхъ дробей къ общему знаменателю; дѣйствіе, польза котораго признана въ современной геометріи и которое мы постоянно прилагаемъ во всѣхъ отдѣлахъ математики, когда употребляемъ разнаго рода вспомогательныя координаты и, смотря по требованіямъ задачи, преобразуемъ ихъ одни въ другія.

Польза поризмъ будетъ видна, можетъ быть, еще яснѣе, если мы ихъ сравнимъ также съ другими новѣйшими пріемами,

Древніе для сравненія различныхъ мѣстъ между собою не имѣли общаго средства, которое могло бы руководить ихъ въ геометрическихъ изысканіяхъ и которымъ мы пользуемся со времени Декарта. Для насъ достаточно выразить мѣсто въ обыкновенныхъ координатахъ, чтобы прямо видѣть его главный характеръ. Затѣмъ изслѣдованіе уравненія показываетъ намъ частныя свойства и особенности кривой и мѣсто, которое она, какъ видъ, занимаетъ въ своемъ семействѣ. Такимъ образомъ нахожденіе уравненія геометрическаго мѣста по системѣ Декарта есть единственный опытъ, который нужно произвести, чтобы узнать общій характеръ мѣста, его положеніе, и отношеніе его къ другимъ извѣстнымъ геометрическимъ мѣстамъ. Древніе не обладали такимъ общимъ и однообразнымъ пріемомъ изслѣдованія. Не имѣя постояннаго образца для сравненія, они принуждены были изобрѣтать различныя средства для распознаванія, въ какихъ отношеніяхъ находится новое, въ первый разъ встрѣтившееся, геометрическое мѣсто къ другимъ уже извѣстнымъ мѣстамъ. Эти средства могли состоять только въ преобразованіи построеній и координатъ съ намѣреніемъ открыть простѣйшія соотношенія, или даже тождество, даннаго мѣста съ извѣстными прежде.

Таково происхожденіе поризмъ. Цѣль ихъ заключалась въ замѣненіи одного геометрическаго или аналитическаго выраженія кривой линіи другимъ.

Эти соображенія объясняютъ связь ученія о поризмахъ съ современными намъ методами и въ то же время показываютъ, какая польза должна была въ нихъ заключаться. Разсматриваемыя съ

такой точки зрѣнія, поризмы представляли дѣйствительно *аналитическую геометрію*, отъ которой наша отличается только алгебраическими пріемами и обозначеніемъ, честь введенія которыхъ принадлежитъ Декарту. Поризмы у древнихъ замѣняли нашъ теперешній анализъ, который сталъ теперь на ихъ мѣсто помимо нашей воли. Весьма замѣчательно, что въ сущности перемѣнилось только названіе. Потомучто анализъ Декарта представляетъ въ своихъ приложеніяхъ ничто иное, какъ непрерывную поризму, имѣющую всегда одни и тѣ же свойства и постоянную форму, въ высшей степени приспособленную къ тому употребленію, для котораго она назначается. Нашъ анализъ, точно также, какъ и поризмы Евклида, имѣетъ цѣлію вывести изъ данныхъ свойствъ мѣста другое выраженіе его, намъ уже извѣстное и показывающее намъ какъ соотношеніе его съ извѣстными мѣстами, такъ и его видъ и положеніе.

Положимъ напримѣръ, что ищется точка, квадратъ разстоянія которой отъ неподвижной точки находится въ данномъ отношеніи къ разстоянію ея отъ неподвижной прямой.

Взявъ въ плоскости чертежа двѣ прямоугольныя оси и означивъ черезъ x и y разстоянія отъ нихъ искомой точки, мы получимъ между этими перемѣнными соотношеніе такого вида:

$$x^2+y^2+ax+by=c^2,$$

гдѣ a, b, c суть постоянные коэффиціенты, зависящіе отъ данныхъ вопроса. Этимъ уравненіемъ выражается слѣдующая поризма:

«Можно найти двѣ такія линіи a и b и такой квадратъ c^2, что, если къ квадратамъ разстояній искомой точки отъ двухъ, проведенныхъ въ плоскости чертежа, осей прибавимъ эти разстоянія, умноженныя соотвѣтственно на линіи a и b, то получимъ сумму, равную квадрату c^2.»

Эта поризма показываетъ, на основаніи началъ аналитической геометріи, что искомое мѣсто есть кругъ.

Но если бы эти начала и не были извѣстны, или еслибы мы ими не захотѣли пользоваться, то мы упростили бы предыдущее урав-

неніе, перенеся начало координатъ, и получили бы уравненіе вида,

$$x^2+y^2=A^2,$$

которое выражаетъ другую поризму:

«Въ плоскости чертежа существуетъ точка, которую можно опредѣлить и которая находится отъ искомой точки на постоянномъ разстояніи, которое также можно опредѣлить».

Эта вторая поризма показываетъ, что мѣсто искомой точки есть кругъ, извѣстный по величинѣ и положенію.

Результаты эти, полученные нами по способу координатъ Декарта, мы могли бы найти безъ вычисленія, путемъ чисто геометрическимъ. Но каковъ бы ни былъ путь, мы видимъ, что эти результаты можно разсматривать какъ поризмы. Отсюда же видно, по нашему мнѣнію, что способъ Декарта замѣнилъ собою поризмы, доставивъ намъ при помощи вычисленія вмѣсто различнаго рода поризмъ, употреблявшихся древними, одну общую формулу, прилагаемую съ удивительнымъ удобствомъ къ всевозможнымъ задачамъ.

Высказавъ наши мнѣнія о теоріи поризмъ, мы должны бы были повѣрить ихъ помощію текста, оставленнаго намъ Паппомъ объ этомъ предметѣ; но Примѣчаніе это выходитъ и безъ того слишкомъ длинно, такъ что мы не будемъ входить въ дальнѣйшія подробности и ограничимся слѣдующими замѣчаніями. Усвоивъ себѣ эту точку зрѣнія на ученіе о поризмахъ и руководствуясь ею, мы пришли къ достаточно простому объясненію 24 поризмъ, не возстановленныхъ Симсономъ. При этомъ мы основывались какъ на 38 леммахъ Паппа къ поризмамъ, такъ и на теоремахъ его, относящихся къ *loca plana* Аполлонія. Такъ какъ поризмы Евклида суть предложенія о прямолинейныхъ и круговыхъ мѣстахъ, то мы имѣли основаніе думать, что Аполлоній долженъ былъ ими пользоваться при составленіи своихъ *loca plana*, изъ которыхъ можно бы составить также цѣлую книгу поризмъ.

Границы сочиненія не позволяютъ намъ привести здѣсь всѣ тѣ поризмы, которыя мы нашли и считаемъ соотвѣтствующими тексту Паппа. Вмѣсто этого мы укажемъ на два весьма общія предложе-

нія, которыя въ своихъ многочисленныхъ слѣдствіяхъ заключаютъ 15 теоремъ Паппа, относящихся къ первой книгѣ поризмъ Евклида и изъ которыхъ слѣдовательно можно вывести эти послѣднія.

Изъ этихъ же двухъ предложеній проистекаютъ многія системы координатъ и, между прочимъ, система Декарта. Отсюда видна уже несомнѣнная связь между поризмами Евклида и нашими системами координатъ—связь, служащая первымъ подтвержденіемъ идей, высказанныхъ нами по поводу ученія о поризмахъ.

Два предложенія, о которыхъ мы говоримъ и которыя мы представляемъ въ формѣ поризмъ, суть слѣдующія.

Первая поризма. *Возьмемъ на плоскости двѣ точки P и P_1, двѣ сѣкущія, встрѣчающіяся съ прямою PP_1 въ точкахъ E и E_1, и на этихъ сѣкущихъ двѣ постоянныя точки O и O_1; если изъ каждой точки какой-нибудь данной прямой будемъ проводить къ точкамъ P и P_1 прямыя, пересѣкающіяся съ сѣкущими EO и E_1O_1 въ точкахъ a и a_1, то можно опредѣлить два такія количества λ и μ, чтобы постоянно существовало соотношеніе*:

$$\frac{Oa}{Ea}+\lambda\frac{O_1a_1}{E_1a_1}=\mu. \qquad (1)$$

Вторая поризма. *На плоскости проведены двѣ неподвижныя прямыя, пересѣкающіяся въ точкѣ S; на этихъ двухъ прямыхъ взяты двѣ неподвижныя точки O и O_1; если около какой-нибудь данной точки будемъ обращать сѣкущую, пересѣкающую двѣ неподвижныя прямыя въ точкахъ a и a_1, то можно найти два такія количества λ и μ, что постоянно будетъ существовать соотношеніе*:

$$\frac{Oa}{Sa}+\lambda\frac{O_1a_1}{Sa_1}=\mu. \qquad (2)$$

Обратныя предложенія также справедливы, т. е.

1. Если между отрѣзками, образуемыми двумя перемѣнными точками a и a_1 на двухъ неподвижныхъ прямыхъ EO и E_1O_1, существуетъ соотношеніе (1), то геометрическое мѣсто точки пересѣченія прямыхъ Pa и P_1a_1 будетъ прямая, положеніе которой, вполнѣ опредѣляется двумя постоянными λ и μ.

2. Если между отрѣзками, образуемыми двумя перемѣнными точками a и a_1 на двухъ неподвижныхъ прямыхъ SO и SO_1, существуетъ соотношеніе (2), то прямая aa_1 проходитъ постоянно черезъ одну и ту же точку, положеніе которой вполнѣ опредѣляется постоянными λ и μ.

Изъ первой поризмы и ея обратной легко выводится слѣдующая весьма общая поризма, относящаяся ко всѣмъ геометрическимъ кривымъ.

Общая поризма. *Если предположимъ тоже, что въ первой поризмѣ, и изъ каждой точки данной кривой линіи будемъ проводить къ точкамъ P и P_1 прямыя, встрѣчающяся съ сѣкущими въ точкахъ a и a_1, то существуютъ такіе коэффиціенты α, β, γ, δ и т. д., при которыхъ будетъ удовлетворено общее уравненіе m-ой степени между отношеніями* $\frac{Oa}{Ea}$ и $\frac{O_1a_1}{E_1a_1}$:

$$\left(\frac{Oa}{Ea}\right)^m+\left(\alpha\frac{O_1a_1}{E_1a_1}+\beta\right)\left(\frac{Oa}{Ea}\right)^{m-1}+\ldots=0$$

Отсюда проистекаетъ безчисленное множество системъ координатъ, которыя могутъ служить для выраженія всѣхъ точекъ кривой; систему Декарта получимъ, если возьмемъ точку P на прямой O_1E_1 и на безконечномъ разстояніи, а точку P на прямой OE и также въ безконечности, и сверхъ того возьмемъ точки O и O_1 въ точкѣ пересѣченія сѣкущихъ OE и O_1E_1.

Вторая поризма и ея обратная ведутъ также къ одной весьма общей поризмѣ, относящейся ко всѣмъ геометрическимъ кривымъ.

Общая поризма. *Проведемъ въ плоскости кривой двѣ сѣкущія, пересѣкающіяся въ точкѣ S, и возьмемъ на нихъ соотвѣтственно двѣ точки O и O_1. Каждая касательная пересѣчетъ эти прямыя въ двухъ точкахъ a и a_1. Если общій характеръ кривой состоитъ въ томъ, что къ ней изъ внѣшней точки можно провесть не болѣе m касательныхъ, то существуютъ такіе коэффиціенты α, β, γ..., при которыхъ будетъ удовлетворено общее уравненіе m-ой степени между отношеніями* $\frac{Oa}{Sa}$ и $\frac{O_1a_1}{Sa_1}$:

$$\left(\frac{Oa}{Sa}\right)^m + \left(\alpha\frac{O_1a_1}{Sa_1}+\beta\right)\left(\frac{Oa}{Sa}\right)^{m-1} + \ldots = 0$$

Возвращаемся къ нашимъ первымъ общимъ предложеніямъ.

Каждое изъ уравненій (1) и (2) можетъ быть различнымъ образомъ преобразовано въ другое, содержащее два, три, или четыре члена. Многія изъ этихъ преобразованій необходимы для изъясненія поризмъ первой книги Евклида. Къ этому мы должны прибавить, что каждое изъ получаемыхъ при этомъ уравненій представляетъ нѣсколько различныхъ поризмъ, потомучто мы можемъ за неизвѣстныя въ поризмѣ принимать не только постоянные коэффиціенты, какъ мы это дѣлали выше, но и различныя составныя части чертежа, напримѣръ точки O и O_1, или направленія сѣкущихъ.

Такимъ образомъ изъ нашихъ двухъ общихъ предложеній можно получить множество поризмъ и мы, кажется, не преувеличимъ, если скажемъ, что число ихъ простирается отъ двухъ до трехъ сотенъ. Такое обиліе вполнѣ согласуется съ тѣмъ, что сказалъ Паппъ о богатствѣ поризмъ Евклида: «*Per omnia Porismata non nisi prima principia, et semina tantum multarum et magnarum rerum sparsisse videtur*» (Euclides).

Изъ всевозможныхъ тождественныхъ уравненій мы избрали для примѣра уравненія (1) и (2) потому, что они обнимаютъ собою наиболѣе важныя изъ безчисленныхъ предложеній, относящихся къ этому предмету, и въ особенности потому, что имъ существуютъ соотвѣтственныя въ пространствѣ, служащія для распространенія Евклидова ученія о поризмахъ на геометрію трехъ измѣреній.

Вотъ двѣ общія теоремы, которыя могутъ служить для этой цѣли и которыя мы выразимъ въ формѣ поризмъ.

Первая поризма. *Въ пространствѣ даны: треугольникъ ABC, три какія нибудь сѣкущія, встрѣчающіяся съ плоскостью треугольника въ точкахъ E, E_1, E_2, и на этихъ сѣкущихъ три неподвижныя точки O, O_1, O_2. Если черезъ каждую точку какой нибудь данной плоскости будемъ проводить три плоскости, про-*

ходящія черезъ стороны треугольника AB, BC, CA и пересѣкающіяся съ сѣкущими соотвѣтственно въ точкахъ a, a_1, a_2, *то можно всегда опредѣлить три такія количества* λ, μ, ν, *чтобы постоянно существовало уравненіе*:

$$\frac{Oa}{Ea} + \lambda \frac{O_1a_1}{E_1a_1} + \mu \frac{O_2a_2}{E_2a_2} = \nu.$$

И обратно, если даны коэффиціенты λ, μ, ν, то имъ всегда соотвѣтствуетъ плоскость, положеніе которой можно опредѣлить.

Вторая поризма. *Возьмемъ въ пространствѣ трегранный уголъ, вершина котораго находится въ точкѣ S, и на ребрахъ его три неподвижныя точки* O, O_1, O_2. *Если около какой нибудь данной точки будемъ вращать плоскость, которая будетъ пересѣкать ребра трегранняго угла въ точкахъ* a, a_1, a_2, *то можно найти три такія количества* λ, μ, ν, *что постоянно будетъ имѣть мѣсто уравненіе*:

$$\frac{Oa}{Sa} + \lambda \frac{O_1a_1}{Sa_1} + \mu \frac{O_2a_2}{Sa_2} = \nu.$$

И обратно, если даны три коэффиціента λ, μ, ν этого уравненія, то ими вполнѣ опредѣляется соотвѣтствующая точка пространства.

Эти двѣ общія теоремы ведутъ къ безчисленному множеству слѣдствій, въ которыхъ между прочимъ заключается начало *преобразованія* фигуръ и *двойственности* свойствъ протяженія. Впрочемъ мы не можемъ входить здѣсь въ подробности относительно этихъ предметовъ.

Прибавленіе. Двѣ поризмы плоской геомотріи, приложенныя нами къ геометріи трехъ измѣреній, имѣютъ также себѣ соотвѣтствующія на сферѣ. Вотъ онѣ:

1-я поризма. *Возьмемъ на сферѣ: двѣ неподвижныя точки* P, P'; *двѣ дуги, пересѣкающіяся съ дугою* PP' *въ* E, E', *и на этихъ двухъ дугахъ соотвѣтственно двѣ неподвижныя точки* O, O'.

Если изъ каждой точки какой нибудь данной дуги будемъ

проводить дуги въ точки P, P', которыя пересѣкутся съ двумя дугами EO, E'O' въ точкахъ a, a', то можно найти два такія количества λ, μ, что всегда будетъ имѣть мѣсто соотношеніе:

$$\frac{sin.\ Oa}{sin.\ Ea}+\lambda\frac{sin.\ O'a'}{sin.\ E'a'}=\mu.$$

2-я поризма. *Проведемъ на сферѣ двѣ дуги большихъ круговъ, пересѣкающіяся въ S и возьмемъ на нихъ соотвѣтственно двѣ неподвижныя точки O, O';*

Если около какой нибудь данной точки сферы будемъ вращать дугу, которая будетъ встрѣчать двѣ неподвижныя дуги въ точкахъ a, a', то всегда можно найти такія два количества λ, μ, что постоянно будетъ существоват-соотношеніе:

$$\frac{sin.\ Oa}{sin.\ Sa}+\lambda\frac{sin.\ O'a'}{sin.\ Sa'}=\mu.$$

Прибавимъ еще одно замѣчаніе. Хотя мы прилагали ученіе о поризмахъ только къ теоремамъ о *геометрическихъ мѣстахъ*, тѣмъ не менѣе мы распространяемъ его, согласно съ общимъ опредѣленіемъ Симсона, и на всѣ другіе роды геометрическихъ и алгебраическихъ предложеній, лишь бы въ нихъ заключались нѣкоторыя перемѣнныя величины.

Въ заключеніе этого примѣчанія Предлагаемъ перечень авторовъ, которые писали о поризмахъ, или только употребляли это слово, не указывая въ точности, какой смыслъ они ему придаютъ.

Прежде всего припомнимъ, что у Грековъ слово πόρισμα въ самомъ употребительномъ и общемъ смыслѣ означало *corollarium*. Въ этомъ значеніи оно часто употребляется Евклидомъ въ элементахъ. Но въ его сочиненіи о *поризмахъ* оно имѣетъ другое значеніе.

Діофантъ въ сочиненіи *Problemata arithmetica* нѣсколько разъ употребилъ слово поризма для обозначенія нѣкоторыхъ предложеній теоріи чиселъ, на которыхъ онъ основывалъ свои доказа-

тельства и которыя вѣроятно составляли предметъ особаго, не дошедшаго до насъ, сочиненія (См. напр. теоремы 3, 5 и 19 книги V.)

Паппъ и Проклъ оставили намъ, какъ уже было сказано, различныя объясненія поризмъ Евклида.

Только у этихъ трехъ древнихъ писателей слово поризма употребляется не въ обыкновенномъ значеніи королларія, а въ особомъ смыслѣ.

У писателей новаго времени слово это встрѣчается въ первый разъ въ Cosmolabium Бессона (Besson. Paris 1567, in 4), гдѣ оно, также какъ и слово королларій, служитъ названіемъ предложеній, проистекающихъ изъ главной теоремы (стр. 203, 207 и 210).

Около того же времени Дасиподій далъ опредѣленіе поризмъ въ смыслѣ Прокла въ сочиненіи: *Volumen II mathematicum, complectens praecepta mathematica, astronomica, logistica*. (Argentorati 1570 in 8, стр. 243 и проч.).

Вьетъ употребилъ слово поризма, говоря о королларіи, слѣдующемъ послѣ 16-й теоремы третьей книги элементовъ Евклида (*Variorum de rebus mathemaitcis responsorum* liber VIII, cap. XIII).

Неперъ въ своемъ безсмертномъ сочиненіи: *Mirifici Logarithmorum canonis descriptio, ejusque usus in utraque trigonometria* etc. (Edinb. 1614, in 4) называетъ поризмою особаго рода общее предложеніе, обнимающее данныя имъ правила для рѣшенія сферическихъ треугольниковъ, въ которыхъ стороны или углы равны 90°.

Александръ Андерсонъ назвалъ поризмою задачу о геометрическомъ мѣстѣ вершины треугольника, въ которомъ основаніе остается одно и тоже, а двѣ другія стороны сохраняютъ постоянное отношеніе. См. *Animadversionis in Franciscum Vietam a Clemente Cyriaco nuper editae, brevis* Διάκρισις, *per Alexandrum Andersonum* (Paris 1617, in 4., 7) [10]).

[10]) Андерсонъ написалъ много другихъ сочиненій о геометрическомъ анализѣ древнихъ, но они не были изданы. Мерсеннъ въ своей книгѣ *de la Vérité des sciences* (1625, in 12., стр. 752) произноситъ большую похвальную рѣчь этому геометру, заслуги котораго, по его словамъ, не были достаточно оцѣнены при жизни, хотя онъ приближался къ Архимеду и Аполлонію. Послѣ этого авторъ говоритъ, что Андерсонъ приготовилъ многія сочиненія въ замѣнъ

Bachetus de Meziriac, подобно Діофанту, употреблялъ слово поризма для означенія цѣлаго ряда предложеній теоріи чиселъ, предложеній, предпосланныхъ введенію и комментаріямъ къ шести ариөметическимъ книгамъ греческихъ математиковъ. Эти поризмы составляли три книги подъ заглавіемъ: *Claudii Casparis Bacheti Sebusiani in Diophantum, Porismatum libri tres* (Paris. 1621, in fol.)

Савилій далъ опредѣленіе поризмъ въ смыслѣ Прокла въ *Praelectiones tredecim in principium elementorum Euclidis* (Oxonii 1621, in 4. Lect. prima, p. 18).

Альбертъ Жираръ (Girard) въ своей тригонометріи (Haag 1626, in 16) и въ комментаріѣ къ сочиненіямъ Стевина (Leyden 1634, in fol. p. 459) заявилъ, что имъ возстановлены поризмы Евклида. Но трудъ этотъ не явился въ свѣтъ. Можетъ быть еще есть надежда, что онъ не окончательно потерянъ.

Кирхеръ (Kircher) въ той части своего сочиненія *Ars magna Lucis et Umbrae* (Romae 1646, in fol.) гдѣ говорится о коническихъ сѣченіяхъ, употребляетъ три слова: *corollarium*, *consectarium* и *porisma* для означенія слѣдствій главной теоремы. Но по большей части послѣднее слово прилагается не къ слѣдствіямъ доказанной теоремы, а къ такимъ предложеніямъ, которыя, наоборотъ, суть обобщенія ея или которыя относятся къ ней какъ отдѣльныя части той же теоріи. Такъ напримѣръ, послѣ доказательства свойства параболы, озаглавленнаго словомъ *Propositio*, находимъ съ надписью *Porismata* изложеніе соотвѣтствующихъ свойствъ эллипса и гиперболы (см. стр. 237 и 238, 242 и 243).

Шутенъ (Schooten) въ *Sectiones triginta miscellaneae* (*Exercitationes mathematicae*. Lib. V. Leyden 1657, in 4., p. 484) даетъ 24-му отдѣлу своего сочиненія заглавіе *Porisma*; здѣсь, чтобы показать примѣръ того, какъ слѣдуетъ поступать въ геометріи для открытія свойствъ фигуръ, онъ предлагаетъ себѣ вывести свойства фигуры, образуемой различными прямыми, проведенными въ плоскости круга.

Четыре слѣдующіе геометра имѣли въ виду прямо разъясненіе поризмъ:

утраченныхъ твореній древнихъ, и предлагаетъ владѣющимъ ими лицамъ не отнимать ихъ у науки.

Marin Ghetaldi, *De resolutione et compositione mathematica*, lib V; opus posthumum. Romae 1640.

Bulliaud, *Exercitationes geomericae tres: 1) circa demonstrationes per inscriptas et circumscriptas figuras; 2) circa conicarum sectionum quasdam propositiones; 3) de Porismatibus.* Parisiis 1657 in 4.

Renaldini. *De resolutione et compositione mathematica, libri duo.* Patavii 1668, in fol.

Fermat, *Varia opera mathematica.* Tolosae 1679, in fol. *Porismatum Euclidaeorum renovata doctrina et sub forma isagoges recentioribus geometricis exhibita.* Это сочиненіе въ четыре страницы было за нѣсколько лѣтъ сообщено Ферматомъ многимъ геометрамъ и между прочимъ Bulliaud, который упоминаетъ объ немъ въ своемъ вышеназванномъ сочиненіи.

Послѣ этого прошло столѣтіе, не доставившее намъ ни одного сочиненія о поризмахъ; потомъ мы находимъ:

Lawson, *Treatise concerning Porisms*, 1777, in 4.—Этотъ геометръ издалъ еще другое сочиненіе о геометріи древнихъ: *geometrical analysis of the ancients*, 1775, in 8.

Wallace, *Geometrical Porisms*, 1796, in 4

Playfair, *On the origin and investigation of Porisms* (*Transactions of the Royal society of Edinburg*, tom. III, 1794 и *Oeuvres de Playfair* въ 4 томахъ, 1822, in 4, t. III, стр. 179).

Lhuillier, *Eléments d'analyse géométrique et d'analyse algebrique.* 1809, in 4.

J. Leslie, *Geometrical analysis*, Lib. III, in 8. Edinb. 1809 и 1821. Это сочиненіе переведено на французскій языкъ Контомъ (Auguste Comte) и присоединено къ *Second supplément à la géométrie descriptive* par Hachette, 1818, in 4.

Въ послѣднее время Вронскій предложилъ объясненіе поризмъ и пользовался этимъ словомъ въ его сочиненіи: *Introduction à la philosophie des mathématiques.* Paris, 1811, in 4 (стр. 217).

Eisenmann, профессоръ въ *école des ponts et chaussées de France*, занимающійся переводомъ сочиненій Паппа съ греческаго текста, обратилъ особое вниманіе на ученіе о поризмахъ, которому онъ обѣщаетъ дать новое объясненіе (См. *Traité des propriétés projectives*, стр. 37 введенія). Вмѣстѣ съ Понселе мы искренно же-

лаемъ, чтобы появленіе этого сочиненія, которое должно принести существенную пользу геометріи, не замедлилось на очень долгое время.

Castillon, извѣстный геометръ прошлаго столѣтія и знатокъ древней геометріи, думалъ, что *сочиненіе о поризмахъ* существовало на востокѣ еще въ XIII столѣтіи и что комментарій къ книгѣ Евклида знаменитаго астронома и геометра Нассиръ Эддинъ-аль-Тузи, упоминаемый Herbelot въ *Bibliothèque d' Orient* относится именно къ сочиненію о поризмахъ, которое одно только могло служить достойнымъ предметомъ для комментарія знаменитому персидскому геометру. «Счастливы, восклицаетъ Кастильонъ, счастливы тѣ геометры, которые обладаютъ этими удивительными книгами и умѣютъ цѣнить ихъ!» (*Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1786—1787).

Драгоцѣнныя открытія могутъ еще быть сдѣланы въ библіотекахъ востока [11], если только ихъ пересмотрѣть внимательно, пользуясь расположеніемъ правительства, благосклоннаго наукамъ и ревнующаго о славѣ распространенія ихъ, какъ во времена Птоломеевъ, Медичи и Лудовика XIV.

ПРИМѢЧАНІЕ IV.

(*Первая эпоха, n⁰ 12*).

О способѣ построенія фокусовъ и доказательства ихъ свойствъ на косомъ конусѣ.

Аполлоній называетъ *фокусы* коническаго сѣченія *точками приложенія* (*Puncta ex applicatione facta*) и опредѣляетъ ихъ слѣдующимъ образомъ: каждая изъ этихъ точекъ дѣлитъ большую ось эллипса, или дѣйствительную ось гиперболы, на два отрѣзка, произведеніе которыхъ равно квадрату другой сопряженной полуоси; или, по выраженію Аполлонія, — равна четвертой части *фигуры*. Словомъ *фигура* онъ означаетъ прямоугольникъ, построенный изъ большой оси и изъ *latus rectum*.

---

11) Персы утверждаютъ, что у нихъ есть греческія сочиненія, не дошедшія до насъ; и дѣйствительно, у Арабовъ мы находимъ цитаты изъ многихъ неизвѣстныхъ намъ сочиненій (Montucla, *Histoire des mathem.* t. I, p. 373, 394).

Построеніе это, какъ мы видимъ, имѣетъ только весьма отдаленное соотношеніе съ самымъ конусомъ; и я не знаю, было ли до сихъ поръ предложено общее и прямое построеніе фокусовъ на конусѣ въ родѣ того какое далъ Яковъ Бернулли для *latus rectum*, за исключеніемъ впрочемъ частнаго случая, когда конусъ прямой, какъ мы увидимъ изъ этого Примѣчанія.

Мы пришли къ слѣдующему построенію въ случаѣ косаго конуса:

Если предположимъ, что сѣкущая плоскость, какъ въ коническихъ сѣченіяхъ Аполлонія, перпендикулярна къ плоскости осеваго треугольника, и проведемъ черезъ одну изъ вершинъ кривой двѣ плоскости, одну параллельную, другую антипараллельную съ основаніемъ конуса, то эти двѣ плоскости пересѣкутъ конусъ по двумъ кругамъ; черезъ центры этихъ двухъ круговъ проведемъ въ плоскости осеваго треугольника кругъ, который касался бы діаметра кривой: точка прикосновенія будетъ одинъ изъ фокусовъ кривой.

Это построеніе не распространяется на тотъ случай, когда діаметръ кривой проходитъ между центрами двухъ круговъ, потомучто тогда онъ не будетъ большою осью (кривая при этомъ есть необходимо эллипсъ), которая въ этомъ случаѣ перпендикулярна къ плоскости осеваго треугольника. Построеніе фокусовъ для этого случая будетъ другое, но оно еще проще, чѣмъ для общаго случая. На прямой, соединяющей центры круговъ, должно описать, какъ на діаметрѣ, кругъ, въ плоскости перпендикулярной къ плоскости осеваго треугольника: *точки, въ которыхъ этотъ кругъ пересѣчется съ большою осью кривой, будутъ искомые фокусы ея.*

Оба эти построенія ведутъ къ одинаковому общему выраженію эксцентрицитета коническихъ сѣченій, разсматриваемыхъ на конусѣ. Именно: *эксцентрицитетъ есть средняя пропорціональная между разстояніями центра кривой отъ центровъ двухъ круговыхъ сѣченій, проведенныхъ чрезъ одну изъ вершинъ, лежащихъ въ плоскости осеваго треугольника.*

Когда конусъ прямой, то выраженіе эксцентрицитета будетъ необыкновенно просто: *изъ центра кривой сѣченія проведемъ до оси конуса наклонную линію параллельную одной изъ образующихъ*

конуса, находящихся въ плоскости осеваго треугольника; эта наклонная будетъ равна экцентрицитету кривой сѣченія.

Построеніе фокусовъ на косомъ конусѣ показываетъ, что *фокальныя линіи* Кетле и Фанъ-Риса (van Rees) (кривыя третьей степени, представляющія геометрическое мѣсто фокусовъ коническихъ сѣченій, образуемыхъ различными плоскостями, проводимыми чрезъ касательныя къ конусу перпендикулярно къ одной изъ главныхъ плоскостей его), разсматриваемыя въ плоскости, представляютъ геометрическое мѣсто точекъ прикосновенія касательныхъ, проводимыхъ изъ неподвижной точки къ различнымъ кругамъ, имѣющимъ двѣ общія точки, или, общѣе, имѣющимъ попарно одну и туже *радикальную ось* (*axe de symptose*). Это предложеніе высказано было нами безъ доказательства еще прежде. (*Correspondance mathém.* par Quetelet, t. VI, p. 207)

Но вмѣстѣ съ тѣмъ мы видимъ, что эти *фокальныя линіи* не всегда представляютъ *вполнѣ* геометрическое мѣсто фокусовъ коническихъ сѣченій; когда, напримѣръ, кривыя образуются плоскостями перпендикулярными къ плоскости *осеваго треугольника*, то кромѣ *кривыхъ третьей степени* получается еще кругъ, лежащій въ другой плоскости и дополняющій собою геометрическое мѣсто.

Это замѣчаніе ускользнуло отъ анализа, употребленнаго Фанъ Рисомъ въ его интересномъ мемуарѣ о фокальныхъ линіяхъ (*Correspondance math.* t. V p. 361).

Предложенное нами построеніе фокусовъ коническихъ сѣченій на косомъ конусѣ не ведетъ къ доказательству свойствъ этихъ точекъ и не может *à priori* обнаружить ихъ существованіе въ коническихъ сѣченіяхъ. Остается разсмотрѣть, какимъ образомъ можно придти къ открытію свойствъ фокусовъ, изслѣдуя кривыя втораго порядка на самомъ конусѣ.

Многіе геометры уже занимались этимъ вопросомъ.

Гамильтонъ, авторъ очень хорошаго сочиненія о коническихъ сѣченіяхъ [12]) пытался вывести свойства *директрисы* на самомъ конусѣ. Но онъ разсматривалъ только прямой конусъ и предполагалъ извѣстными *à priori* фокусы каждаго сѣченія (p. 100, 122)

---

12) *De sectionibus conicis tractatus geometricus, in quo ex natura ipsius coni, sectionum affectiones facillime deducuntur, methodo nova*; (Dublin 1758; *in*—4.

Въ послѣднее время Кетле и Данделенъ, изслѣдуя коническія сѣченія на тѣлѣ, получили прекрасные новые результаты; изъ нихъ слѣдующій представляетъ, кажется, еще первое построеніе фокусовъ коническаго сѣченія на самомъ конусѣ:

Прямой конусъ пересѣченъ плоскостію; представимъ себѣ, что въ него вписаны два шара, касающіеся плоскости: точки прикосновенія и будутъ фокусы сѣченія конуса плоскостью; прямыя же, по которымъ пересѣчется эта плоскость съ двумя плоскостями круговъ прикосновенія шаровъ и конуса, будутъ соотвѣтствующія этимъ фокусомъ директрисы.

Данделенъ распространилъ эту теорему на коническія сѣченія, разсматриваемыя, вмѣсто конуса, на гиперболоидѣ вращенія [13]). Мы обобщили ее еще болѣе, выведя, какъ слѣдствіе, изъ общаго свойства поверхностей втораго порядка. (*Annales des mathématiques*, t. XIX, p. 167).

Другое слѣдствіе этого общаго свойства выражаетъ собою свойство фокусовъ, разсматриваемыхъ на косомъ конусѣ, именно:

Пусть косой конусъ пересѣченъ какою-нибудь плоскостью; впишемъ въ конусъ поверхность втораго порядка, касательную къ плоскости, такъ, чтобы точка прикосновенія была концомъ одного изъ двухъ діаметровъ, представляющихъ мѣсто центровъ круговыхъ сѣченій этой поверхности; тогда точка прикосновенія будетъ фокусомъ сѣченія конуса плоскостью.

Это весьма общая теорема; но понятно, что она не можетъ вести насъ къ опредѣленію фокусовъ коническаго сѣченія и не можетъ служить для изслѣдованія свойствъ этихъ точекъ. Теорема Кетле и Данделена, напротивъ того, особенно удобна для этой цѣли; но она относится только къ сѣченіямъ на прямомъ конусѣ.

Такимъ образомъ вопросъ о способѣ получать и изслѣдовать фокусы, пользуясь для этого свойствами косаго конуса, остается еще не рѣшеннымъ.

Мы предложили бы для этого два пріема.

Вопервыхъ: брать сѣкущую плоскость (предполагая ее перпендикулярною къ осевому треугольнику, какъ въ коническихъ сѣче-

---

13) *Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, t. III.

ніяхъ Аполлонія) такъ, чтобы ось конуса дѣлала съ нею такой же уголъ, какъ и съ плоскостію основанія конуса. Тогда *точка встрѣчи оси съ сѣкущею плоскостію будетъ фокусомъ сѣченія.* Этотъ фокусъ будетъ соотвѣтствовать центру круга, служащаго конусу основаніемъ, т. е. будетъ его перспективой; слѣдовательно здѣсь свойства центра приведутъ къ характеристическимъ свойствамъ фокуса.

Вовторыхъ: изучать сперва свойства конуса независимо отъ кривыхъ, получаемыхъ отъ пересѣченія его плоскостями. Таковы прежде всего свойства *двухъ плоскостей*, проведенныхъ черезъ вершину конуса, изъ которыхъ одна параллельна плоскости круглаго основанія, а другая плоскости обратнаго сѣченія. Потомъ различныя свойства, въ которыхъ подобную же роль играютъ *двѣ прямыя линіи*, извѣстнымъ образомъ проводимыя черезъ вершину конуса и представляющія большую аналогію съ *фокусами* коническихъ сѣченій.

Если конусъ пересѣчемъ плоскостью, перпендикулярною къ одной изъ этихъ прямыхъ, то полученное коническое сѣченіе будетъ имѣть фокусъ въ точкѣ пересѣченія плоскости съ этою прямою; нѣкоторыя свойства этой прямой будутъ примѣняться къ фокусу, разсматриваемому по отношенію къ коническому сѣченію.

Въ этомъ заключается второй способъ изучать свойства фокусовъ на самомъ конусѣ.

Что касается до свойствъ конуса относительно двухъ плоскостей и двухъ прямыхъ, о которыхъ мы говорили, то они легко получаются при помощи самыхъ простыхъ геометрическихъ соображеній. Этимъ путемъ мы получили нѣсколько подобныхъ свойствъ, которыя помѣщены въ шестомъ томѣ *Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles.*

ПРИМѢЧАНІЕ V.

(Первая эпоха, n⁰ 15)

Объ опредѣленіи геометріи. Соображенія о двойственности, какъ о законѣ природы.

Различіе, которое Аристотель и Декартъ находили между двумя вопросами, составляющими постоянный предметъ математическихъ наукъ, даетъ намъ смѣлость высказать критическое замѣчаніе объ опредѣленіи геометріи, встрѣчаемомъ почти во всѣхъ элементарныхъ руководствахъ. Говорятъ, что это *наука, имѣющая предметомъ измѣреніе пространства.* Но измѣреніе, собственно говоря, представляетъ только весьма небольшую часть тѣхъ свойствъ пространства, которыя составляютъ предметъ изслѣдованія геометровъ. Мы не думаемъ, напримѣръ, чтобы Жергонъ, Понселе, Штейнеръ, Плюкеръ и другіе геометры, новѣйшіе труды которыхъ имѣютъ достаточно извѣстности, особенно много занимались *измѣреніемъ,* какъ это слѣдовало бы изъ вышеприведеннаго опредѣленія. *Начертательная геометрія* Монжа относится существенно къ наукѣ о свойствахъ пространства, и хотя она можетъ служить для нахожденія *мѣры* тѣлъ, но несомнѣнно, что это есть самое незначительное изъ ея приложеній. Изъ этого видно, что опредѣленіе, о которомъ мы говоримъ, неполно и недостаточно.

Недостаточность эта не остается, можетъ-быть, безъ вредныхъ послѣдствій; она, можетъ-быть, содѣйствовала пренебреженію къ нашей наукѣ. Математики, не слѣдившіе лѣтъ тридцать за развитіемъ геометріи, знакомы въ этой наукѣ только со способами квадратуръ Кеплера, Кавальери, Паскаля, Григорія С. Винцента и др. и то потому, что эти способы имѣютъ тѣсную связь съ интегральнымъ исчисленіемъ, составляющимъ постоянный предметъ для ихъ глубокихъ соображеній. И нельзя не согласиться, что интегральное исчисленіе есть окончательное и высшее усовершенствованіе этихъ геометрическихъ способовъ, замѣняющее ихъ съ удивительною выгодою. Отсюда мысль, что изученіе чистой геоме-

тріи есть праздное занятіе, такъ какъ вся она заключается въ формулахъ интеграціи и, другими словами, представляетъ не болѣе какъ простой вопросъ анализа.

Но если включить въ опредѣленіе понятіе о *формѣ* и *положеніи* фигуръ, то нельзя уже будетъ думать, чтобы одна аналитическая формула могла рѣшать безконечное разнообразіе вопросовъ, представляющихся тогда воображенію; при нѣсколько внимательномъ взглядѣ на сущность этихъ вопросовъ мы легко увидимъ, что они представляютъ весьма большія затрудненія для анализа Декарта, этого всеобщаго математическаго орудія, и найдемъ даже цѣлый отдѣлъ вопросовъ, для которыхъ этотъ анализъ, въ его настоящей формѣ, оказывается недостаточнымъ; мы показываемъ это въ VI главѣ (*n*⁰ 5). Мы думаемъ также, что результатомъ такого внимательнаго разсмотрѣнія дѣла было бы убѣжденіе, что чистая геометрія, разработываемая сама для себя и своими собственными средствами, необходима для полнаго познанія свойствъ пространства, необходима для рѣшенія множества весьма важныхъ вопросовъ, для уясненія аналитическихъ пріемовъ въ ихъ приложеніяхъ какъ къ самой геометріи, такъ и къ явленіемъ природы.

Замѣчательно, въ историческомъ отношеніи, что Римляне, которые были весьма слабыми геометрами, чувствовали однако недостаточность стариннаго опредѣленія геометріи и ввели вмѣсто него другое, находящееся въ геометріи Боэція: *Geometria est disciplina magnitudinis immobilis formarumque descriptio contemplativa, per quam unius cujusque rei termini declarari solent.* Почти въ тѣхъ же словахъ это опредѣленіе встрѣчается у Кассіодора [14]) и какъ кажется, съ этого времени употреблялось писателями среднихъ вѣковъ: напримѣръ писателемъ XIII вѣка Vincent de Beauvais въ его *Speculum doctrinale* (lib. XVI; cap. XXXVI [15]). Въ эпоху возрожденія оно также было въ употребленіи. Оно встрѣчается въ *Margarita philosophica* Reisch'а [16]); почти таково же опредѣленіе,

---

14) *Aurelii Cassiodori, senatoris, etc. Opera omnia Rotomagi* 1679, *in fol.* кн. II, стр. 583.

15) *Bibliothéca Mundi. Duaci*, 1624, 4 *vol. in fol. tomus secundus, qui Speculum doctrinale inscribitur.*

16) *Heidelberg*, 1486, *in*-4. Перепечатано въ Стразбургѣ, Базелѣ и Фрейбургѣ.

данное Тарталеа въ третьей части его сочиненія о числахъ и мѣрахъ: «*La Geometria è una scientia, ouer disciplina, che contempla la descrition delle figure, ouer forme della quantita continna immobile, come que è la terra, e altre cose simili*»:

Надобно удивляться, почему не сохранилось это опредѣленіе. Правда, съ давнихъ поръ были геометры, въ особенности Даламбертъ, которые старались къ нему возвратиться, называя геометрію наукою о свойствахъ пространства, имѣющаго извѣстную форму (*de l'étendue figurée*). Мы видимъ двѣ причины, почему не было принято всѣми геометрами это точное опредѣленіе.

Одни хотѣли, безъ сомнѣнія, сохранить смыслъ греческаго слова *геометрія*, которое значитъ *измѣреніе земли*. Но очевидно, что это слово, если ограничиваться его точнымъ этимологическимъ значеніемъ, могло годиться только въ самое первое время геометріи. Послѣ первыхъ успѣховъ этой науки уже со времени Өалеса, оно сдѣлалось недостаточнымъ. Поэтому уже Платонъ строго критиковалъ его и называлъ *смѣшнымъ* [17]). Впослѣдствіи, оставляя наукѣ прежнее названіе *геометрія*, вставили въ ея опредѣленіе, вмѣсто выражаемаго этимъ названіемъ понятія о *землѣ*, болѣе общее понятіе о *пространствѣ*. Слѣдовало сдѣлать болѣе и замѣнить понятіе только о *мѣрѣ* сложнымъ понятіемъ о *мѣрѣ* и *порядкѣ* (расположеніи), чтобы дать слову *геометрія* истинный и полный смыслъ.

Другіе геометры, вѣроятно съ философской точки зрѣнія, желаютъ выразить въ опредѣленіи только одну цѣль геометріи, *измѣреніе* пространства, имѣя въ виду подвести подъ одно абсолютное понятіе весь особый классъ явленій, представляемыхъ намъ пространствомъ и составляющихъ значительнѣйшую часть нашихъ

---

17) *His cognitis atque perspectis, proxima est illa quam ridiculo admodum nominc* (γελοῖον ὄνομα) *Geometriam nuncupant.* (*In Epinomide. Platonis opera omnia*; *traduction de Jean de Serres, t.* II, p. 990)

Эта столь справедливая критика Платона была повторена многими писателями XVI вѣка. Знаменитый филологъ и профессоръ математики *Nicodemus Frischlin* выразился такъ: *Amplissima est et pulcherrima scientia figurarum. At quam est inepte sortita nomen Geometriae!* (*J. Vossius, De universae matheseos natura et constitutione Liber*).

положительныхъ знаній. Но, какъ ни полезны вообще всякаго рода обобщенія въ понятіяхъ, также какъ въ принципахъ и методахъ, какъ ни велики и прекрасны идеи, внушенныя Пиѳагору и другимъ философамъ принципомъ единства, составляющимъ характеръ древней философіи,—однако скорѣе можно думать, что абсолютное единство не составляетъ принципа природы. Напротивъ того, многочисленные дуализмы, замѣчаемые какъ въ явленіяхъ природы такъ и въ различныхъ частяхъ человѣческихъ знаній, заставляютъ предполагать, что истинный принципъ природы заключается въ постоянной *двойственности*, въ двоякой единицѣ.

Эту двойственность, какъ мы уже говорили, встрѣчаемъ мы и въ самомъ предметѣ геометріи, и въ сущности всѣхъ свойствъ пространства, въ которыхъ *точка* и *плоскость* играютъ тождественныя роли (см. Прим. XXXIV), и въ двоякомъ движеніи небесныхъ тѣлъ, гдѣ постоянная и признанная двойственность принимается какъ законъ[18]) и въ тысячѣ другихъ явленій.

Итакъ, если будемъ въ высшихъ соображеніяхъ искать опредѣленія, свойственнаго геометріи, то увидимъ, что, включая въ него два обширныя подраздѣленія *порядокъ* и *мѣру*, соотвѣтствующія двоякой цѣли этой науки, мы не будемъ противорѣчить требованіямъ философіи.

ПРИМѢЧАНІЕ VI.

(*Первая эпоха*, *n*° 22).

О теоремѣ Птоломея относительно треугольника, пересѣченнаго трансверсалью.

Эта теорема неправильно называется *Птоломеевой*, такъ какъ она встрѣчается еще въ *Сферикѣ* Менелая откуда ее и заим-

[18]) Можетъ быть этотъ принципъ служитъ возраженіемъ противъ Ньютоновой теоріи распространенія свѣта. Если свѣтовая частица одарена поступательнымъ движеніемъ, то она, по всей вѣроятности, должна имѣть также и вращательное движеніе. Но этого нельзя допустить, потомучто отсюда проистекало бы ложное слѣдствіе, что при отраженіи луча свѣта отъ какой нибудь поверхности уголъ отраженія не равенъ углу паденія.

ствовалъ Птоломей. Но такъ какъ Альмагестъ гораздо болѣе распространенъ и извѣстенъ, нежели Сферика, то ее всегда находили только въ первомъ изъ этихъ сочиненій и потому ошибочно приписывали Птоломею.

Паппъ доказалъ эту теорему и пользовался ею въ восьмой книгѣ *Математическаго Собранія* для доказательства любопытнаго предложенія о центрѣ тяжести трехъ тѣлъ, движущихся по тремъ сторонамъ треугольника; въ XVI вѣкѣ Пурбахъ и Регіомонтанъ помѣстили ее въ изданномъ ими сокращеніи Альмагеста [19]) и потому она въ то время была извѣстна кажется всѣмъ геометрамъ; ее употребляли для геометрическаго доказательства правила *шести количествъ:* Oronce Finée въ своей ариѳметикѣ [20]) и Stiffels въ алгебрѣ [21]). Въ то же время Cardan [22]), Gemma Frisius [23]), J. Schoner [24]) указывали ее въ Альмагестѣ для той же цѣли, но не строили чертежа [25]); Maurolycus пользовался; ею какъ леммой,

---

19) *Cl. Ptolemaei Alexandrini in magnam constructionem, G. Purbachii cujusque discipuli J. de Regiomonte astronomicon epitoma.* Venètiis, 1496, in.fol.

20) *Arithmetica practica, libris quatuor absoluta,* etc. 1535, in fol., lib. 4, cap. 4.

21) *Arithmetica integra.* Norimbergae, 1544, in-4, lib. 3, p. 294.

22) *Practica arithmetica, et mensurandi singularis.* Mediolani, 1539, in-8, cap. XLVI. *Opus novum de proportionibus numerorum,* etc. Basileae, 1570, in fol., prop 5.

23) *Arithmeticae practicae methodus facilis.* Antwerpiae, 1540, in—8°.

24) *Algorithmus demonstratus.* Norimbergae, 1534, in-4°, de proportionibus appendix.

25) Правило шести количествъ служитъ къ рѣшенію слѣдующаго вопроса: отношеніе перваго количества ко второму дано, какъ составное изъ отношеній третьяго къ четвертому и пятаго къ шестому; требуется опредѣлить отношеніе втораго, или третьяго, или пятаго, къ одному изъ трехъ остальныхъ. Если a, b, c, d, e, f будутъ эти шесть количествъ, то

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}$$

и требуется отсюда вывести отношеніе одного изъ трехъ количесть b, c, d къ одному изъ трехъ другихъ a, d, f. Въ такой алгебраической формѣ вопросъ этотъ безъ сомнѣнія такъ простъ, какъ только можно себѣ представить, и трудно бы было повѣрить, что, напримѣръ, Карданъ могъ посвятить ему довольно много страницъ въ вышеприведенныхъ двухъ сочиненіяхъ, если бы мы не приняли во вниманіе, что это правило есть обобщеніе правила пропорціи

для доказательства свойствъ асимптотъ гиперболы [26]) и Bressius—для вывода различныхъ формулъ тригонометріи [27]).

Въ XVII столѣтіи приложенія теоремы были еще болѣе многочисленны и разнообразны. Мерсеннъ въ двухъ своихъ сочиненіяхъ помѣстилъ ее между главными предложеніями сферики Менелая [28]). Стевинъ пользовался ею въ Практической ариѳметикѣ при составленіи сложныхъ отношеній, чтобы на этомъ примѣрѣ показать, что въ извѣстныхъ вопросахъ геометрія можетъ доставлять болѣе быстрое рѣшеніе, нежели алгебра; Снеллій при помощи этой теоремы рѣшилъ 35-й вопросъ сочиненія Van Ceulen: *Zetemata Geometrica* [29]); Богранъ употреблялъ ее въ своей *Геостатикѣ* для составленія отношеній между линіями; Дезаргъ пользовался ею для доказательства прекраснаго геометрическаго свойства треугольниковъ, которое находится въ продолженіи его *Traité de perspective*, изданномъ Боссомъ (1648, in—8⁰); Паскаль въ *Essai pour les coniques* помѣстилъ ее въ число главныхъ теоремъ, на которыхъ долженъ былъ основываться его полный трактатъ

четырехъ количествъ, которое изъ него получается напримѣръ при $c=d$. Но это послѣднее правило до изобрѣтенія алгебры, и даже позднѣе, представляло всегда самый трудный и, такъ сказать, трансцендентный отдѣлъ въ курсахъ ариѳметики, по причинѣ стариннаго обозначенія пропорцій, въ которомъ вмѣсто одного знака, выражающаго равенство двухъ отношеній, употреблялось три знака. Это обозначеніе, несмотря на очевидныя невыгоды и неудобства, употребляется и въ наше время многими писателями.

Карданъ приписываетъ правило шести количествъ арабскому геометру Алкинду (X вѣка), котораго онъ считаетъ въ числѣ величайшихъ геніевъ, существовавшихъ со времени происхожденія наукъ (См. *De subtilitate*, lib. XVI.) Дѣйствительно, въ *Bibliotheca Arabico—Hispana* Казири мы находимъ весьма длинный списокъ сочиненій, написанныхъ Алкиндомъ по всѣмъ отдѣламъ наукъ математическихъ, философскихъ, нравственныхъ и пр. Сочиненія эти еще полвѣка тому назадъ существовали въ богатой библіотекѣ Эскуріала.

26) *F. Maurolyci opuscula mathematica.* Venetiis, 1575, in—4⁰, pag. 281.

27) *Metrices astronomicae libri quatuor.* Paris. 1581, in fol, lib.4, prop 13.

28) *Synopsis mathematica.* Paris, 1626, in—24. *Universae geometriae, mixtaeque mathematicae synopsis, etc.* Paris, 1644, in—4⁰

29) Математическія сочиненія Ludolphe Van Ceulen, переведенныя съ голландскаго на латинскій языкъ и дополненныя примѣчаніями Снелліемъ. Leyde. 1619, pag. 120.

объ этихъ кривыхъ: Шутенъ въ сочиненіи *De concinnandis demonstrationibus* etc. доказалъ ее синтетически и посредствомъ анализа; около того же времени итальянскій писатель Гуарини употреблялъ ее также, какъ и Богранъ, для составленія отношеній между линіями [30]) Нѣсколько лѣтъ спустя, другой итальянскій геометръ, имѣющій нѣкоторую извѣстность въ наукѣ, маркизъ Чева (Jean Ceva) нашелъ самъ, весьма остроумнымъ и оригинальнымъ способомъ, эту теорему и еще другую такого же рода, которая также есть одна изъ основныхъ въ теоріи трансверсалей и изобрѣтателемъ которой до сихъ поръ считали Ивана Бернулли. Сочиненіе Чевы, въ которомъ находятся эти двѣ теоремы и еще нѣкоторыя другія, заслуживающія вниманія, носитъ заглавіе: *De lineis se invicem secantibus, statica constructio.* Milan, 1678 in—4°. Въ слѣдующемъ Примѣчаніи мы познакомимъ читателей съ методомъ, которымъ отличается это сочиненіе.

Послѣ этого времени мы не встрѣчаемъ болѣе даже слѣдовъ теоремы Птоломея, которая около двухъ столѣтій была въ большомъ употребленіи и извѣстна всѣмъ геометрамъ, но потомъ болѣе вѣка оставалась безплодною и, можетъ быть, даже совсѣмъ неизвѣстною, до того времени, когда Карно, нашедшій самъ эту теорему вмѣстѣ съ многими другими подобными ей и относящимися къ плоскому четыреугольнику, не указалъ на нее, какъ на одну изъ самыхъ полезныхъ и богатыхъ теоремъ раціональной геометріи Мы однако должны замѣтить что еще за нѣсколько лѣтъ до этого Шубертъ привелъ эту теорему въ видѣ леммы къ сферической тригонометріи Птоломея [31]), и что другой геометръ, на сѣверѣ, Фуссъ[32]), также пользовался ею, вмѣстѣ съ соотвѣтствующею теоремой на сферѣ, для доказательства нѣкоторыхъ предложеній, напримѣръ для доказательства прекраснаго свойства круга, которое Фуссъ приписываетъ Даламберту, именно, что «точки

---

[30]) *Euclides adauctus et methodicus, mathematicaque universalis* Aug. Taurinorum, 1671, in fol. pag. 249.

[31]) Trigonometria sphaerica é Ptolemaeo; *Nova Acta Petropolitana*, ann. 1794 t. XII, p. 165.

[32]) *Nova Acta Petropolitana*, ann 1797 et 1798, t. XIV.

встрѣчи общихъ касательныхъ къ тремъ кругамъ взятымъ попарно, лежатъ на одной прямой».

Изъ названныхъ нами авторовъ только Мерсеннъ показалъ, что теорема принадлежитъ Менелаю; большею частію ее приписывали Птоломею; нѣкоторые же писатели не указывали вовсе ея происхожденія, таковы: Мавроликъ, Дезаргъ, Паскаль и Чева; послѣдній, по всей вѣроятности, открылъ ее самъ.

Флаути въ *Geometria di sito* уже указалъ на употребленіе, какое сдѣлалъ Паппъ изъ этой теоремы въ восьмой книгѣ *Математическаго Собранія*. Наши указанія на Мавролика и Шуберта мы заимствовали изъ мемуара Бріаншона *sur les lignes du second ordre*, а указаніе на Дезарга—изъ *Traité des propriétés projectives* Понселе. Мы не сомнѣваемся, что могутъ найтись еще многія указанія, кромѣ тѣхъ, которыя мы прибавили уже къ этимъ первоначальнымъ; потомучто теорема, о которой мы говоримъ, была вѣроятно хорошо извѣстна Арабамъ, такъ какъ соотвѣтственная теорема на сферѣ, доказываемая при ея помощи, была ими комментирована и прославлена во многихъ сочиненіяхъ; для европейскихъ математиковъ, получившихъ эти теоремы отъ Мавровъ, онѣ сдѣлались также предметовъ размышленій Таковъ, напримѣръ, Симонъ Бредонъ, англичанинъ XIV вѣка, многія сочиненія котораго объ этомъ предметѣ хранятся въ Бодлейянской библіотекѣ (Bodléienne); объ этомъ говоритъ ученый Галлей въ своемъ переводѣ *Сферики* Менелая.

Что касается до происхожденія этихъ двухъ теоремъ, то оно вѣроятно восходитъ до Гиппарха, который прежде Птоломея и Менелая занимался вычисленіемъ хордъ и тригонометріей. Очень понятно, что этотъ знаменитый астрономъ выводилъ свойства сферическаго треугольника изъ свойствъ треугольника на плоскости; но какія геометрическія соображенія могли вести его къ этимъ послѣднимъ? Мы склонны даже думать, что открытіе теоремы о плоскомъ треугольникѣ восходитъ до Евклида и что она составляла часть его *поризмъ*, потомучто она совершенно въ томъ же родѣ, какъ и всѣ разнообразныя леммы, къ поризмамъ оставленныя намъ Паппомъ; намъ кажется, что одна изъ этихъ леммъ (137-я теорема седьмой книги *Математическаго Собранія*), отли

чающаяся отъ самой теоремы только тѣмъ, что одно отношеніе отрѣзковъ замѣнено въ ней другимъ, назначалась для облегченія доказательства этой теоремы.

Мы смѣло высказываемъ такое предположеніе, потомучто теорема эта самымъ естественнымъ образомъ помѣщается въ ряду другихъ однородныхъ съ нею предложеній, которыя соединены нами въ группу, соотвѣтствующую, по нашему мнѣнію, первой книгѣ *поризмъ* Евклида.

ПРИМѢЧАНІЕ VII.

(*Продолженіе Примѣчанія VI*).

О сочиненіи Чевы, подъ заглавіемъ: De lineis rectis se invicem secantibus, statica constructio (in — 4, Milan, 1678).

Основная мысль этого сочиненія заключается въ томъ, чтобы пользоваться свойствами центра тяжести системы точекъ въ такихъ вопросахъ, гдѣ разсматриваются отношенія отрѣзковъ, образуемыхъ нѣсколькими пересѣкающимися прямыми, какъ, напримѣръ, во многихъ предложеніяхъ теоріи трансверсалей. Предполагается, что въ точкахъ пересѣченія прямыхъ помѣщены тяжелыя массы, пропорціональныя длинамъ отрѣзковъ; законы равновѣсія рычага ведутъ къ соотношеніямъ между этими массами, а отсюда дѣлается заключеніе объ отношеніяхъ между отрѣзками.

Чтобы доказать, напримѣръ, этимъ путемъ теорему Птоломея, разсмотримъ треугольникъ ABC, стороны котораго AB, BC, CA пересѣчены какою нибудь прямою соотвѣтственно въ точкахъ c, a, b. Положимъ, что въ a, C, A помѣщены три матеріальныя точки, изъ которыхъ масса первой a' произвольна, массы же C', A' двухъ другихъ опредѣлены такъ, чтобы точка B была центромъ тяжести массъ, помѣщенныхъ въ a и C, а точка b — центромъ тяжести массъ, находящихся въ C и A Центръ тяжести трехъ массъ будетъ находиться въ точкѣ c пересѣченія прямыхъ ab и AB.

На основаніи закона статики имѣемъ:

$$\frac{aB}{aC}=\frac{C'}{a'+C'};\quad C'=A'.\frac{Ab}{Cb}.$$

Вѣсы a' и C' могутъ быть замѣнены однимъ вѣсомъ $a'+C'$, помѣщеннымъ въ B; сравнивая его съ A', получимъ:

$$a'+C'=A'.\frac{Ac}{Bc}$$

и потому

$$\frac{aB}{aC}=\frac{Ab}{Ac}\cdot\frac{Bc}{Cb},\ \text{или}\ aB.\,bC.\,cA=aC.\,cB.\,bA,$$

что и имѣлось въ виду доказать.

Перейдемъ къ другой теоремѣ. Надобно доказать, что *если три прямыя, исходящія изъ вершинъ треугольника, проходятъ черезъ одну и туже точку, то отрѣзки, образуемые ими на противоположныхъ сторонахъ, таковы, что произведеніе трехъ изъ нихъ, не имѣющихъ общихъ конечныхъ точекъ, равно произведенію трехъ остальныхъ.*

Пусть будетъ ABC треугольникъ, $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ три прямыя, проходящія черезъ точку D и встрѣчающіяся съ противолежащими сторонами треугольника въ точкахъ α, β, γ. Помѣстимъ въ A матеріальную точку, масса которой A' произвольна, а въ B и C двѣ другія матеріальныя точки, массы которыхъ B' и C' таковы, что центръ тяжести массъ A', B' находится въ γ, а центръ тяжести массъ A', C'—въ β. Центръ тяжести трехъ массъ будетъ въ точкѣ пересѣченія прямыхъ $B\beta$, $C\gamma$, т. е. въ D. Отсюда слѣдуетъ, что точка α будетъ центромъ тажести массъ B', C', такъ что

$$\frac{B\alpha}{C\alpha}=\frac{C'}{B'},$$

но

$$\frac{C'}{A'}=\frac{A\beta}{C\beta}\ \text{и}\ \frac{B'}{A'}=\frac{A\gamma}{B\gamma},$$

слѣдовательно

$$\frac{Ba}{Ca} \cdot \frac{C\beta}{A\beta} \cdot \frac{A\gamma}{B\gamma} = 1,$$

что и требовалось доказать.

Иванъ Бернулли также доказалъ впослѣдствіи эту теорему (*Oeuvres*, t. IV, pag. 33), но, кажется, не пользовался ею.

Чева, доказавъ эту теорему при помощи статики, даетъ потомъ два другія, чисто геометрическія, доказательства ея, изъ которыхъ одно, по его словамъ, принадлежитъ Караваджіо (Lib. I, prop. 10).

Разсматривая вмѣсто треугольника четыреугольникъ, въ вершинахъ котораго помѣщены матеріальныя точки, Чева получилъ другую теорему, которая также есть одна изъ важнѣйшихъ въ теоріи трансверсалей: *плоскость, встрѣчающая четыре стороны косаго четыреугольника, образуетъ на нихъ восемь такихъ отрѣзковъ, что произведеніе четырехъ изъ нихъ, не имѣющихъ общихъ конечныхъ точекъ, равно произведенію четырехъ остальныхъ* (Lib. I, prop. 22).

Первая книга оканчивается нѣкоторыми свойствами трехгранной и четырехгранной пирамиды, выведенными посредствомъ того же способа.

Во второй книгѣ находятся различныя свойства прямолинейныхъ фигуръ и кривыхъ втораго порядка, доказанныя при помощи тѣхъ же началъ, какъ и въ первой книгѣ. Приведемъ слѣдующее предложеніе, которое теперь разсматривается, какъ частный случай болѣе общаго свойства коническихъ сѣченій *если коническое сѣченіе вписано въ треугольникъ, то прямыя, проведенныя изъ вершинъ въ точки прикосновеня противоположныхъ сторонъ, пересѣкаются въ одной точкѣ.*

Наконецъ въ *прибавленіи* (appendix), которое Чева предлагаетъ какъ отдѣльное сочиненіе съ содержаніемъ независимымъ отъ предыдущаго, рѣшены посредствомъ весьма глубокомысленныхъ геометрическихъ пріемовъ многіе вопросы о площадяхъ плоскихъ фигуръ, ограниченныхъ дугами различныхъ круговъ, и объ объе-

махъ и центрахъ тяжести разныхъ тѣлъ, каковы параболоидъ и двухъ родовъ гиперболоиды вращенія.

Немногихъ словъ достаточно, чтобы доказать по способу Чевы одно любопытное и полезное свойство четыреугольника.

Изъ чертежа, которымъ мы только что пользовались, имѣемъ

$$\frac{AD}{D\alpha}=\frac{C'+B'}{A'};\ \text{но}\ C'=A'.\frac{A\beta}{C\beta}\ \text{и}\ B'=A'.\frac{A\gamma}{B\gamma}.$$

слѣдовательно

$$\frac{AD}{D\alpha}=\frac{A\beta}{C\beta}+\frac{A\gamma}{\gamma B}$$

Разсматривая четыреугольникъ $A\beta D\gamma$, въ которомъ C и B суть точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ, мы увидимъ, что это уравненіе выражаетъ слѣдующую теорему:

Во всякомъ четыреугольникѣ діагональ, выходящая изъ какой-нибудь вершины, дѣленная на свое продолженіе до прямой, соединяющей точки встрѣчи противоположныхъ сторонъ, равна суммѣ сторонъ, выходящихъ изъ той же вершины и раздѣленныхъ соотвѣтственно на ихъ продолженія до противоположныхъ сторонъ.

Для этой теоремы существуетъ соотвѣтствующая въ пространствѣ, которую можно доказать подобнымъ же образомъ, разсматривая вмѣсто треугольника тетраэдръ и четыре прямыя, проведенныя изъ его вершинъ въ одну и ту же точку; фигура представляетъ тогда восьмиугольный шестигранникъ, противоположныя грани котораго пересѣкаются попарно по тремъ прямымъ лежащимъ въ одной плоскости.

Діагональ, выходящая изъ какой-нибудь вершины, дѣленная на свое продолженіе до той плоскости, равна суммѣ прилежащихъ къ той же вершинѣ реберъ, дѣленныхъ соотвѣтственно на ихъ продолженія до той же плоскости.

Этою именно теоремою мы пользовались въ приложеніяхъ *новой системы координатъ*, изложенной въ *Correspondance* de M. Quetelet, t. VI p. 86, an. 1830.

Прибавленіе. Когда Примѣчаніе VII о сочиненіи Чевы *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio* было уже напечатано, вышла 24-я тетрадь *Journal de l'école Polytechnique*, въ которой помѣщенъ мемуаръ Коріолиса *Sur la Théorie des momens considérés comme analyse des rencontres des lignes droites*, посвященный тому же предмету, какъ и сочиненіе Чевы. Коріолисъ доказываетъ здѣсь въ немногихъ словахъ и безъ вычисленій, посредствомъ теоріи моментовъ, рядъ теоремъ въ родѣ тѣхъ, которыя находятся въ теоріи трансверсалей Карно, но гораздо болѣе общихъ. Особенно замѣчательно доказательство двоякаго образованія помощію прямой линіи гиперболоида съ одною полостью.

ПРИМѢЧАНІЕ VIII.

(*Первая эпоха*, n^0 *29.*)

Образованіе спиралей и квадратриксъ при помощи винтовой поверхности. Аналогія этихъ кривыхъ съ тѣми, которыя носятъ съ ними одинаковыя наименованія въ Декартовой системѣ координатъ.

Построенія спирали и квадратриксы, оставленныя намъ Паппомъ, представляютъ не болѣе, какъ простыя приложенія двухъ общихъ способовъ получать, посредствомъ двухъ поверхностей, винтовой и еще другой надлежащимъ образомъ избранной, всевозможныя *спирали* и безконечное множество другихъ кривыхъ, которыя я буду называть *квадратриксами*, потомучто онѣ выражаются въ такихъ же координатахъ, какъ и квадратрикса Динострата.

Вторая поверхность, которую при этомъ нужно употреблять, будетъ для построенія *спиралей* — поверхность вращенія около оси винтовой поверхности; для построенія же *квадратриксъ*—цилиндрическая поверхность, образующія которой перпендикулярны къ оси винта.

Наши построенія ведутъ непосредственно къ *касательнымъ* и къ *кругамъ кривизны* разсматриваемыхъ кривыхъ. Но главная

выгода этихъ построеній заключается въ томъ, что они указываютъ постоянныя геометрическія соотношенія между этими кривыми и тѣми, которыя носятъ тѣ же названія въ обыкновенной системѣ координатъ, напримѣръ, между *гиперболическою спиралью* и *гиперболой*, между *логариѳмическою спиралью* и *логариѳмикой*. Въ этой системѣ *Архимедова спираль* соотвѣтствуетъ *прямой линіи*

До сихъ поръ между этими кривыми было замѣчено только одно сходство, именно одинаковая форма ихъ уравненій между разнородными перемѣнными; но это не указывало ни связи между ихъ построеніями, ни другихъ геометрическихъ соотношеній ихъ между собою. Способъ же, въ которомъ одни изъ нихъ служатъ для построенія другихъ, ведетъ самымъ лучшимъ образомъ къ тѣмъ свойствамъ, благодаря которымъ эти кривыя, особенно логариѳмическая спираль, сдѣлались извѣстны, и указываетъ *a priori* геометрическія основанія этихъ прекрасныхъ свойствъ

Построеніе спиралей. Вообразимъ себѣ поверхность вращенія, происходящую отъ обращенія какой-нибудь кривой около неподвижной оси, взятой въ ея плоскости; пусть эта ось будетъ вертикальна; перпендикуляры, опущенные на нее изъ точекъ кривой, будутъ *ординаты*, а разстоянія основаній этихъ перпендикуляровъ отъ постоянной точки, взятой на оси,—*абсциссы*.

Положимъ, что плоскость кривой вращается равномѣрно и что въ то же время точка M, взятая на вращающейся кривой, движется по ней такъ, что абсциссы возрастаютъ также равномѣрно. Это значитъ, другими словами, что движеніе точки по направленію оси пропорціонально вращательному движенію. При этомъ точка M опишемъ на поверхности вращенія нѣкоторую кривую двоякой кривизны.

Прямоугольное проложеніе этой кривой на плоскость, перпендикулярную къ оси вращенія, будетъ спираль, уравненіе которой мы получимъ при помощи уравненія кривой, служащей для образованія поверхности вращенія.

Пусть

$$z=Fy$$

будетъ уравненіе образующей кривой; разсмотримъ ее въ какомъ-

нибудь опредѣленномъ положеніи; положимъ, что на ней въ *M* находится въ этомъ положеніи движущаяся точка, абсцисса которой *z* будетъ пропорціональна вращенію плоскости кривой отъ начала движенія; это вращеніе будетъ измѣряться угломъ, образуемымъ слѣдомъ вращающейся плоскости на плоскости горизонтальной съ неподвижною осью, обозначающею начало движенія; пусть будетъ *u* этотъ уголъ; мы будемъ имѣть:

$$z = au, \text{ и слѣдовательно } au = Fy.$$

Пусть будетъ *m* проложеніе точки *M* на горизонтальную плоскость, и *O* пересѣченіе оси вращенія съ этою плоскостію. Радіусъ *Om*, который означимъ черезъ *r*, равенъ ординатѣ *y* точки *M*; такимъ образомъ между этимъ радіусомъ и угломъ его *u* съ неподвижною осью, о которой мы говорили, получается соотношеніе

$$au = Fr .$$

Это соотношеніе есть ничто иное, какъ полярное уравненіе проложенія кривой двоякой кривизны, начерченной на поверхности вращенія.

Замѣтимъ теперь, что перпендикуляръ, опущенный изъ движущейся точки *M* на ось вращенія, образуетъ поверхность винта съ четыреугольною нарѣзкою, или, какъ ее называютъ, *винтовую поверхность* (hélіçoïde rampante); дѣйствительно, этотъ перпендикуляръ остается постоянно горизонтальнымъ и поднимается равномѣрно надъ горизонтальною плоскостію въ то время, какъ заключающая его вертикальная плоскость вращается равномѣрно около оси.

Итакъ, кривая, образуемая точкою *M*, есть пересѣченіе поверхности вращенія съ винтовою поверхностью.

Отсюда проистекаетъ слѣдующая теорема:

1° *Всякая спираль* (мы называемъ *спиралью* всякую кривую, изображаемую уравненіемъ между полярными координатами *r* и *u*) *можетъ быть разсматриваема какъ проложеніе пересѣченія винтовой поверхности съ нѣкоторою, надлежащимъ образомъ опредѣленною, поверхностію вращенія; причемъ общей осью этимъ*

двумъ поверхностямъ служитъ линія, проведенная черезъ начало спирали перпендикулярно къ ея плоскости.

2°. *Если*

$$au = Fr$$

есть уравненіе спирали и въ немъ a представляетъ отношеніе восходящаго движенія образующей винтовой поверхности къ вращательному движенію ея, то уравненіе поверхности вращенія будетъ

$$z = Fy,$$

гдѣ абсциссы z считаются по направленію оси вращенія, а ординаты y—перпендикулярно къ ней.

Такимъ образомъ въ случаѣ Архимедовой спирали, уравненіе которой есть $au = r$:

Уравненіе меридіана поверхности вращенія будетъ $z = y$; слѣдовательно это будетъ прямая и поверхность вращенія будетъ конусъ; въ этомъ заключается одна изъ двухъ теоремъ Паппа.

Въ случаѣ гиперболической спирали, уравненіе которой $ur =$пост.:

Уравненіе меридіана поверхности вращенія будетъ $zy = a$. пост. $=$пост. Слѣдовательно меридіанъ есть равносторонняя гипербола, одна изъ асимптотъ которой направлена по оси винта.

Въ случаѣ логариѳмической спирали, выражаемой уравненіемъ $u = log r$, будемъ имѣть

$$z = a \log y.$$

Это уравненіе логариѳмики, въ которой абсциссы z пропорціональны логариѳмамъ ординатъ y. Слѣдовательно:

Если представимъ себѣ поверхность вращенія, образуемую движеніемъ обыкновенной логариѳмики около ея асимптоты, и винтовую поверхность, для которой эта асимптота служитъ осью, то въ пересѣченіи этихъ двухъ поверхностей получимъ кривую двоякой кривизны, прямоугольное проложеніе которой на плоскость, перпендикулярную къ асимптотѣ, будетъ логариѳмическая спираль.

Касательныя къ спиралямъ. Пусть M будетъ точка пересѣченія винтовой поверхности съ такою поверхностію вращенія, при помощи которой получается, какъ мы уже говорили, данная спираль.

Касательная въ точкѣ m спирали будетъ ничто иное, какъ проложеніе линіи пересѣченія касательныхъ плоскостей къ этимъ двумъ поверхностямь въ точкѣ M. Касательная плоскость къ поверхности вращенія пересѣчетъ ось вращенія въ точкѣ O; допустимъ, что горизонтальная плоскость, на которой начерчена спираль, проходитъ черезъ эту точку; прямая OM будетъ въ такомъ случаѣ пролагаться по Om, т. е. по радіусу-вектору спирали.

Касательная плоскость къ поверхности вращенія встрѣтится съ горизонтальною плоскостью по прямой Ot, перпендикулярной къ Om.

Касательная плоскость къ винтовой поверхности въ точкѣ M проходитъ черезъ образующую этой поверхности, параллельную радіусу вектору Om; слѣдъ ея на горизонтальной плоскости будетъ слѣдовательно параллеленъ Om. Для нахожденія этого слѣда достаточно, поэтому, опредѣлить одну его точку. Но разсматриваемая касательная плоскость проходитъ черезъ касательную къ винтовой линіи, проведенной черезъ точку M по винтовой поверхности;. эта касательная линія лежитъ въ вертикальной плоскости, перпендикулярной къ радіусу вектору Om. Пусть θ будетъ точка встрѣчи ея съ горизонтальною плоскостью и α уголъ ея съ осью винтовой поверхности Въ треугольникѣ $Mm\theta$ уголъ при m будетъ прямой и мы получимъ $m\theta=Mm.tg\alpha$. Но изъ свойствъ винтовой поверхности извѣстно, что тригонометрическій тангенсъ угла α пропорціоналенъ разстоянію точки M отъ оси поверхности, т. е. $tang\alpha=Om.\ Const.$ Постоянное это равно отношенію круговаго къ восходящему движенію образующей винтовой поверхности,—отношенію, которое мы означили черезъ $\frac{1}{a}$; поэтому

$$tang\alpha=\frac{Om}{a},\ \text{и}\ m\theta=\frac{Mm.Om}{a}.$$

Прямая $m\theta$ перпендикулярна къ радіусу вектору Om; слѣдъ плоскости касательной къ винтовой поверхности параллеленъ Om; слѣдовательно, если на линіи Ot, перпендикулярной къ Om, отложимъ часть

$$Ot=m\theta=\frac{Mm.Om}{a},$$

то точка t будетъ находиться на вышеупомянутомъ слѣдѣ. Но Ot есть также слѣдъ плоскости касательной къ поверхности вращенія; поэтому точка t принадлежитъ пересѣченію касательныхъ плоскостей къ обѣимъ поверхностямъ, слѣдовательно она находится на касательной къ спирали, происходящей отъ проложенія линіи пересѣченія двухъ поверхностей.

Линія Ot называется, какъ извѣстно, *субтангенсомъ* спирали; отрѣзокъ же On, на продолженіи Ot, между точкою O и нормалью къ кривой — есть *субнормаль*; она равна квадрату радіуса вектора, раздѣленному на субтангенсъ; слѣдовательно

$$On=\frac{a.Om}{Mm}.$$

Чтобы воспользоваться этими формулами, замѣтимъ, что такъ какъ касательная плоскость въ M къ поверхности вращенія проходитъ чрезъ точку O, то линія Mm есть субтангенсъ кривой, образующей поверхность вращенія, считаемый по направленію оси вращенія.

Назовемъ черезъ S длину этого субтангенса; припомнивъ, что радіусъ векторъ спирали Om равенъ ординатѣ y образующей поверхности вращенія, получимъ

$$Ot=\frac{y.S}{a},$$

$$On=\frac{a.y}{S}.$$

Таковы выраженія субтангенса и субнормали спирали въ функціи субтангенса и ординаты образующей поверхности вращенія.

Въ Архимедовой спирали образующая линія есть прямая; $\frac{y}{s}=$ пост. слѣдовательно $On=$пост. т. е.

въ Архимедовой спирали субнормаль постоянна.

Въ гиперболической спирали образующая есть равносторонняя гипербола, въ которой, какъ извѣстно, $Sy=$пост., слѣдовательно $Ot=$пост. т. е.

въ гиперболической спирали субтангенсъ имѣетъ постоянную величину.

Логариѳмика имѣетъ постоянный субтангенсъ по направленію асимптоты, т. е. S=пост., слѣдовательно въ логариѳмической спирали будетъ

$$\frac{Ot}{y} = \text{пост., или } \frac{Ot}{Om} = \text{пост.}$$

Но $\frac{Ot}{Om}$ представляетъ тангенсъ угла касательной къ спирали съ радіусомъ векторомъ и потому этотъ уголъ будетъ постоянный, т. е.

Въ логариѳмической спирали касательная дѣлаетъ постоянный уголъ съ радіусомъ векторомъ.

Такъ какъ Ot пропорціональна Om, то ясно, что, если отложимъ на радіусѣ векторѣ линію равную субтангенсу, то конецъ этой линіи будетъ лежать на логариѳмической спирали, подобной съ данною; если поворотимъ эту спираль на четверть окружности около центра, то всѣ ея радіусы векторы совпадутъ съ соотвѣтствующими субтангенсами данной спирали; слѣдовательно основанія касательныхъ (точки t) логариѳмической спирали лежатъ на другой подобной ей спирали. Но двѣ подобныя логариѳмическія спирали необходимо равны между собою, потомучто въ нихъ углы касательныхъ съ радіусами векторами одинаковы, а каждому данному углу соотвѣтствуетъ только одна спираль; такимъ образомъ мы можемъ высказать слѣдующую теорему:

Въ логариѳмической спирали основанія касательнымъ лежатъ на совершенно такой же логариѳмической спирали. только иначе расположенной.

Это же свойство принадлежитъ и основаніямъ субнормалей.

Радіусы кривизны спиралей. Разсматривая спираль, какъ сѣченіе прямаго цилиндра, проходящаго черезъ кривую пересѣченія поверхности вращенія съ винтовою поверхностью, легко найти, при помощи теоремъ Эйлера и Менье, для каждой точки величину радіуса кривизны въ функціи радіуса кривизны меридіаннаго сѣченія поверхности вращенія. Чтобы сократить настоящее Примѣчаніе, мы опускаемъ здѣсь это построеніе, къ которому возвратимся въ другое время.

До другаго сочиненія откладываемъ также построеніе *квадратриксъ*, сходное съ построеніемъ *спиралей*.

ПРИМѢЧАНІЕ IX.

(*Первая эпоха*, n^0 *30*)

Объ ангармонической функціи четырехъ точекъ, или четырехъ прямыхъ

Когда четыре точки a, b, c, d лежатъ на одной прямой, то функцію

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}$$

мы назвали *ангармоническимъ отношеніемъ* четырехъ точекъ.

129-е предложеніе седьмой книги Паппа означаетъ, что *если четыре прямыя выходятъ изъ одной точки, то всякая сѣкущая встрѣчаетъ ихъ въ четырехъ точкахъ, ангармоническое отношеніе которыхъ имѣетъ всегда одну и ту же величину, каково бы ни было положеніе сѣкущей.*

Это свойство *ангармонической функціи* отличаетъ ее отъ всѣхъ другихъ функцій, которыя можно составить изъ отрѣзковъ между четырьмя точками.

Но ангармоническая функція обладаетъ другимъ, еще болѣе важнымъ ствойствомъ, изъ котораго первое можетъ быть выведено, какъ слѣдствіе, именно:

Если изъ произвольной точки проведемъ прямыя къ четыремъ точкамъ, расположеннымъ на одной прямой, то ангармоническая функція этихъ четырехъ точекъ будетъ равна результату подстановки въ ту же функцію вмѣсто четырехъ отрѣзковъ, ее составляющихъ, синусовъ угловъ между прямыми заключающими эти отрѣзки.

Мы представили ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ a, b, c, d въ видѣ функціи

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd};$$

но можно взять также двѣ другія функціи

$$\frac{ac}{ab} : \frac{dc}{db}, \quad \frac{ab}{ad} : \frac{cb}{cd}.$$

Для четырехъ точекъ a, b, c, d нельзя составить четвертой подобной же функціи. Слѣдовательно, *ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ можетъ выражаться въ трехъ видахъ.*

Если одна изъ точекъ находится въ безконечности, то ангармоническое отношеніе упрощается и содержитъ только два отрѣзка. Если, напримѣръ, точка d удалена въ безконечность, то ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ a, b, c и точки безконечно удаленной выразится слѣдующими тремя способами:

$$\frac{ac}{cb}, \quad \frac{ca}{ab}, \quad \frac{ba}{bc}.$$

Пусть a, b, c, d, будутъ четыре точки на одной прямой и a', b', c', d' четыре соотвѣтствующія имъ точки на другой прямой; положимъ, что ангармоническое отношеніе однѣхъ равно ангармоническому отношенію другихъ, т. е имѣетъ мѣсто одно изъ трехъ слѣдующихъ уравненій:

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{a'c'}{a'd'} : \frac{b'c'}{b'd'}$$

$$\frac{ac}{ab} : \frac{dc}{db} = \frac{a'c'}{a'b'} : \frac{d'c'}{d'b'} \qquad (A)$$

$$\frac{ab}{ad} : \frac{cb}{cd} = \frac{a'b'}{a'd} : \frac{c'b'}{c'd'}$$

Говорю, что *тогда два другія уравненія будутъ уже слѣдствіями этого.* Такимъ образомъ *одно изъ трехъ уравненій* (*A*) *заключаетъ въ себѣ два другія.* Повѣрить это можно посредствомъ вычисленія. Но гораздо легче воспользоваться для доказательства этого свойства ангармонической функціи геометрическими соображеніями.

Помѣстимъ двѣ прямыя, на которыхъ находятся двѣ разсматриваемыя системы точекъ, такимъ образомъ, чтобы двѣ соотвѣтственныя точки d, d' слились въ одну точку D; проведемъ прямыя aa', bb', cc'; эти три прямыя пройдутъ черезъ одну и ту же точку. Дѣйствительно, положимъ, что S, есть точка пересѣченія двухъ первыхъ aa' и bb'. Проведемъ SD и Sc; положимъ, что S, встрѣчаетъ прямую $a'b'c'$ въ γ; на основаніи вышеприведеннаго предложенія Паппа будемъ имѣть

$$\frac{ac}{aD}:\frac{bc}{bD}=\frac{a'\gamma}{a'D}:\frac{b'\gamma}{b'D};$$

допустимъ, что имѣетъ мѣсто первое изъ уравненій (A); вставляя въ него D вмѣсто d и сравнивая съ послѣднимъ уравненіемъ, увидимъ, что точка γ совпадаетъ съ c'. Откуда слѣдуетъ, что три прямыя aa', bb', cc' проходятъ черезъ одну и туже точку S.

Разсматривая четыре прямыя Saa', Sbb', и SD, пересѣченныя двумя трансверсалями $abcD$, $a'b'cD$, мы на основаніи предложенія Паппа заключимъ, что два послѣднія изъ уравненій (A) также справедливы.

Такимъ образомъ каждое изъ уравненій (A) ведетъ за собою два другія.

Поэтому равенство ангармоническихъ отношеній въ двухъ системахъ четырехъ точекъ, соотвѣтствующихъ другъ другу попарно, можетъ быть выражено тремя способами, изъ которыхъ каждый заключаетъ въ себѣ остальные.

На этомъ важномъ свойствѣ ангармонической функціи будетъ основано много полезныхъ приложеній.

Такъ, напримѣръ, изъ него прямо слѣдуетъ, что каждое изъ семи уравненій, выражающихъ инволюціонное соотношеніе между шестью точками, заключаетъ въ себѣ шесть остальныхъ.

Равенство ангармоническихъ отношеній двухъ системъ четырехъ точекъ можетъ быть также выражено посредствомъ трехчленныхъ уравненій, которыя часто бываютъ полезны.

Такъ, кромѣ трехъ уравненій (A), имѣемъ еще слѣдующія:

$$\frac{ac}{ad}:\frac{bc}{bd}+\frac{a'b'}{a'd'}:\frac{c'b'}{c'd'}=1,$$

$$\frac{ac}{ab}:\frac{dc}{db}+\frac{a'd'}{a'b'}:\frac{c'd'}{c'b'}=1, \qquad (B)$$

$$\frac{ab}{ad}:\frac{cb}{cd}+\frac{a'c'}{a'd'}:\frac{b'c'}{b'd'}=1.$$

Каждое изъ этихъ трехъ уравненій, выражая равенство ангармоническихъ отношеній въ двухъ системахъ точекъ, заключаетъ въ себѣ два другія и три прежнія.

Однимъ словомъ, каждое изъ шести уравненій (A) и (B) заключаетъ въ себѣ пять остальныхъ.

Доказать уравненія (B) нетрудно. Первое, напримѣръ, вслѣдствіе третьяго изъ уравненій (A), принимаетъ видъ:

$$\frac{ac}{ad}:\frac{bc}{bd}+\frac{ab}{ad}:\frac{cb}{cd}=1;$$

остается доказать это уравненіе. Для этого сдѣлаемъ перспективное проложеніе прямой $abcd$ на другую прямую такимъ образомъ, чтобы перспектива точки d была въ безконечности; пусть α, β, γ будутъ перспективы точекъ a, b, c; такъ какъ ангармоническая функція проэктивна, мы будемъ имѣть:

$$\frac{ac}{ad}:\frac{bc}{bd}=\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} \text{ и } \frac{ab}{ad}:\frac{cb}{cd}=\frac{\alpha\beta}{\gamma\beta}$$

и наше уравненіе обратится въ

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma}+\frac{\alpha\beta}{\gamma\beta}=1, \text{ или } \beta\alpha+\alpha\gamma=\beta\gamma.$$

Но это есть тождественное соотношеніе между тремя точками β, α, γ, если предположимъ, что онѣ расположены въ томъ же порядкѣ, какъ написаны.

Такимъ образомъ уравненія (B) доказаны.

Замѣтимъ, что уравненіе, написанное выше, обращается, по уничтоженіи знаменателей, въ

$$ab.\,cd - ac.\,bd + bc.\,ad = 0$$

и представляетъ общее соотношеніе между какими-нибудь четырьмя точками, лежащими на одной прямой.

Соотношеніе это было доказано Эйлеромъ алгебраически и геометрически. Первый способъ доказательства состоитъ въ томъ, что вмѣсто нѣкоторыхъ множителей вставляются ихъ выраженія въ функціи другихъ и такимъ образомъ уравненіе обращается въ тождество. При второмъ доказательствѣ составляется чертежъ, изображающій три прямоугольника, входящіе въ уравненіе, и легко обнаруживается, что одинъ изъ нихъ равенъ суммѣ двухъ другихъ (Петербургскіе *Novi Commentarii*, томъ I, 1747 и 1748 года. *Variae demonstrationes Geometricae*).

Понселе также доказалъ это соотношеніе въ *Mémoire sur les centres des moyennes harmoniques.* (Journal von Crelle, t III, p. 269).

По отношенію къ четыремъ прямымъ, исходящимъ изъ одной точки, кругъ имѣетъ свойство, сходное съ тѣмъ, которое принадлежитъ двумъ прямымъ трансверсалямъ и которое выражается уравненіями (A) и (B).

Это свойство состоитъ въ томъ, что

Если четыре прямыя, исходящія изъ одной точки, встрѣчаютъ окружность: первая въ a, a', вторая съ b, b', третья въ c, c' и четвертая въ d, d', то получается соотношеніе

$$\frac{\sin\frac{1}{2}ca}{\sin\frac{1}{2}cb} : \frac{\sin\frac{1}{2}da}{\sin\frac{1}{2}db} = \frac{\sin\frac{1}{2}c'a'}{\sin\frac{1}{2}c'b'} : \frac{\sin\frac{1}{2}d'a'}{\sin\frac{1}{2}d'b'}.$$

Это уравненіе соотвѣтствуетъ первому изъ уравненій (A). Такимъ же образомъ получимъ уравненія подобныя двумъ другимъ уравненіямъ (A) и три уравненія, подобныя уравненіямъ (B).

Это свойство круга ведетъ ко многимъ новымъ предложеніямъ.

Мы приглашаемъ геометровъ обратить полное вниманіе на понятіе объ *ангармоническомъ* отношеніи, которое, несмотря на то,

что оно весьма элементарно, можетъ быть въ высшей степени полезно при множествѣ геометрическихъ изслѣдованій, гдѣ оно будетъ доставлять легкія и возможно простыя доказательства. Мы воспользуемся имъ въ Примѣчаніи X объ инволюціи шести точекъ и въ Примѣчаніяхъ XV и XVI для доказательства, можно сказать въ нѣсколькихъ словахъ, самыхъ общихъ свойствъ коническихъ сѣченій.

Не менѣе будетъ полезна эта теорія и въ геометріи трехъ измѣреній.

Для примѣра предложимъ себѣ доказать двоякое образованіе помощію прямой линіи гиперболоида съ одною полостью, что можетъ быть выражено слѣдующими словами:

Поверхность, образуемая движущеюся прямою, опирающеюся на три неподвижныя прямыя, можетъ быть образуема другимъ образомъ, именно движеніемъ прямой, опирающейся на три положенія первой образующей; поверхность эта имѣетъ свойство пересѣкаться со всякою плоскостію по коническому сѣченію.

Первая часть этого предложенія основывается на слѣдующихъ двухъ леммахъ, изъ которыхъ одна есть взаимная другой, и которыя обѣ настолько важны, что ихъ можно разсматривать какъ особыя теоремы.

Теорема I. *Если изъ четырехъ прямыхъ каждая опирается на три неподвижныя прямыя, расположенныя какимъ угодно образомъ въ пространствѣ, то ангармоническое отношеніе отрѣзковъ, образуемыхъ ими на одной изъ этихъ трехъ прямыхъ, равно ангармоническому отношенію отрѣзковъ, образуемыхъ на каждой изъ двухъ другихъ.*

Пусть L, L', L'' будутъ три данныя линіи въ пространствѣ; a, b, c, d — точки пересѣченія прямыхъ A, B, C, D съ линіею L, a', b', c', d' и a'', b'', c'', d'' — точки пересѣченія тѣхъ же прямыхъ съ L' и L''. Говорю, что ангармоническое отношеніе для точекъ a, b, c, d и для точекъ a', b', c', d' одинаково. Дѣйствительно, какъ то такъ и другое изъ этихъ ангармоническихъ отношеній равно ангармоническому отношенію четырехъ плоскостей, которыя всѣ пересѣкатся по линіи L'' и проходятъ соотвѣтственно черезъ четыре прямыя A, B, C, D. Слѣдовательно оба ангармоническія отношенія одинаковы.

Теорема II. Обратно: *Если четыре прямыя пересѣкаются съ двумя неподвижными прямыми въ пространствѣ такъ, что ангармоническія отношенія отрѣзковъ, образуемыхъ на этихъ двухъ прямыхъ, одинаковы, то всякая прямая, опирающаяся на три изъ этихъ четырехъ прямыхъ, необходимо пересѣчется четвертою.*

Пусть L, L' будутъ двѣ неподвижныя прямыя въ пространствѣ и пусть прямыя A, B, C, D пересѣкаютъ первую въ точкахъ a, b, c, d, а вторую въ a', b', c', d' такъ, что при этомъ:

$$\frac{ca}{cb}:\frac{da}{db}=\frac{c'a'}{c'b'}:\frac{d'a'}{d'b'};$$

надобно доказать, что эти четыре прямыя таковы, что всякая прямая L'', опирающаяся на три изъ нихъ A, B, C, необходимо встрѣтится съ четвертою D.

Для этого черезъ точку d прямой L проведемъ прямую D', опирающуюся на прямыя L' и L''; пусть δ', δ'' будутъ точки пересѣченія ея съ L', L''. Такъ какъ четыре прямыя A, B, C, D' опираются на три прямыя L, L' L'', то на основаніи теоремы I имѣемъ:

$$\frac{ca}{cb}:\frac{da}{db}=\frac{c'a'}{c'b'}:\frac{\delta' a'}{\delta' b'}.$$

Сравнивая это уравненіе съ предыдущимъ, видимъ, что точка δ', совпадаетъ съ d. Слѣдовательно прямая D', проведенная черезъ точку d и опирающаяся на L' и L'', есть ничто иное, какъ прямая D. Поэтому прямая L'', опирающаяся на A, B, C, пересѣкается съ D. Такимъ образомъ теорема доказана.

Представимъ себѣ теперь три прямыя L, L', L'' въ пространствѣ и пусть A, B, C, D и т. д. будутъ различныя положенія движущейся прямой, опирающейся на эти три прямыя: говорю, что всякая прямая M, опирающаяся на A, B, C, необходимо пересѣчется съ D. Дѣйствительно, прямыя A B, C, D, на основаніи теоремы I, образуютъ на L, L' отрѣзки ангармоническія отношенія которыхъ равны, и потому, вслѣдствіе теоремы II, всякая прямая, опирающаяся на три изъ этихъ прямыхъ, необходимо пересѣчется съ четвертою.

Итакъ: *когда движущаяся прямая опирается на три неподвижныя прямыя, то всякая прямая, опирающаяся на три положенія движущейся прямой, пересѣчется со всѣми другими положеніями ея.* Въ этомъ состоитъ первая часть предложенной теоремы.

Для доказательства второй части разсмотримъ какую нибудь сѣкущую плоскость, встрѣчающуюся съ прямыми L, L' въ точкахъ λ, λ' и съ прямыми A, B, C, D въ точкахъ α, β, γ, δ: Эти шесть точекъ лежатъ на кривой пересѣченія поверхности съ плоскостію. Надобно доказать, что онѣ находятся на коническомъ сѣченіи. Для этого достаточно обнаружить, согласно съ общимъ свойствомъ коническихъ сѣченій, которое будетъ доказано въ Примѣчаніи XV, что ангармоническое отношеніе четырехъ прямыхъ, соединяющихъ α, β, γ, δ, съ точкою λ, равно ангармоническому отношенію четырехъ прямыхъ, соединяющихъ тѣ же точки съ λ'. Но ангармоническое отношеніе четырехъ прямыхъ $\lambda\alpha$, $\lambda\beta$, $\lambda\gamma$, $\lambda\delta$ принадлежитъ также четыремъ плоскостямъ, проведеннымъ черезъ L и пересѣкающимся съ сѣкущею плоскостью по этимъ прямымъ; ангармоническое отношеніе плоскостей въ свою очередь принадлежитъ четыремъ точкамъ, въ которыхъ прямыя A, B, C, D, лежащія въ этихъ плоскостяхъ, встрѣчаются съ прямою L'. Подобнымъ же образомъ ангармоническое отношеніе четырехъ прямыхъ $\lambda'\alpha$, $\lambda'\beta$, $\lambda'\gamma$, $\lambda'\delta$ равно ангармоническому отношенію четырехъ точекъ пересѣченія прямыхъ A, B, C, D съ прямою L. Но эти два ангармоническія отношенія точекъ встрѣчи прямыхъ A, B, C, D съ L и L' равны между собою (теорема I): слѣдовательно четыре прямыя $\lambda\alpha$, $\lambda\beta$, $\lambda\gamma$, $\lambda\delta$ и четыре прямыя $\lambda'\alpha$, $\lambda'\beta$, $\lambda'\gamma$, $\lambda'\delta$ имѣютъ равныя ангармоническія отношенія. Поэтому шесть точекъ α, β, γ, δ, λ, λ' лежатъ на коническомъ сѣченіи. Отсюда заключаемъ, что сѣченіе поверхности всякою плоскостію есть коническое сѣченіе. Что и слѣдовало доказать.

Такимъ образомъ теорема о двоякомъ образованіи гиперболоида съ одною полостію движеніемъ прямой линіи доказана вполнѣ и притомъ помощію совершенно элементарныхъ геометрическихъ соображеній.

Въ анализѣ доказываютъ, что прямыя, проведенныя черезъ какую-нибудь точку пространства параллельно образующимъ гиперболоида,

образуютъ конусъ *втораго порядка*. Теорія ангармоническаго отношенія даетъ чрезвычайно простое доказательство и для этого предложенія. Достаточно для этого примѣнить къ сѣченію конуса плоскостію тѣ же разсужденія, которыя мы только что употребили для плоскаго сѣченія гиперболоида; легко обнаружится, что это сѣченіе есть также кривая втораго порядка.

Слѣдствіе. Теорема I, разсматриваемая по отношенію къ гиперболоиду, выражаетъ слѣдующее свойство этой поверхности: *Въ гиперболоидѣ съ одною полостію четыре образующія одного рода опредѣляютъ на какой нибудь образующей втораго рода четыре отрѣзка, ангармоническое отношеніе которыхъ сохраняетъ одинаковую величину, каково бы ни было положеніе этой образующей втораго рода.*

Если, напримѣръ, a, b, c, d будутъ точки, въ которыхъ четыре образующія перваго рода A, B, C, D встрѣчаютъ образующую втораго рода L и a', b', c', d' точки встрѣчи тѣхъ же образующихъ перваго рода съ другою образующею втораго рода L', то

$$\frac{ca}{cb}:\frac{da}{db}=\frac{c'a'}{c'b'}:\frac{d'a'}{d'b'}.$$

Это уравненіе можно написать въ такомъ видѣ:

$$\frac{ca}{cb}=\frac{c'a'}{c'b'}\cdot\left(\frac{da}{db}:\frac{d'a'}{d'b'}\right), \text{ или } \frac{ca}{cb}=\frac{c'a'}{c'b'} \text{ Пост.}$$

Это можно выразить такъ: *если имѣемъ четыреугольникъ $abb'a'$ и раздѣлимъ противоположныя стороны его ab, $a'b'$ въ точкахъ c, c' такъ, чтобы*

$$\frac{ca}{cb}=\frac{c'a'}{c'b'}\cdot\text{Пост.}$$

то прямая cc' образуетъ гиперболоидъ съ одною полостью

Мы еще прежде доказали другимъ способомъ это свойство гиперболоида, служившее до сихъ поръ для доказательства двоякаго образованія этой поверхности. (*Correspondance sur l'école polytechnique, t.* II, p. 446).

ПРИМѢЧАНІЕ X.

(*Первая эпоха*, n^0 *34.*)

Теорія инволюціи шести точекъ.

1. Мы раздѣлимъ это примѣчаніе на двѣ части. Въ первой изложимъ уже извѣстныя свойства инволюціи шести точекъ. Во второй же дадимъ новыя выраженія инволюціи, которыя, какъ намъ кажется, могутъ упростить эту теорію и расширить ея приложенія.

Первая часть.

2. Когда шесть точекъ, лежащихъ на прямой линіи и соотвѣтствующихъ другъ другу попарно, напр. A и A' и B и B', C и C', образуютъ между собою такіе отрѣзки, что существуетъ соотношеніе:

$$\frac{CA.\ CA'}{CB.\ CB'}=\frac{C'A.\ C'A'}{C'B.\ C'B'},$$

то говорятъ, что эти шесть точекъ находятся въ *инволюціи* и соотвѣтствующія другъ другу точки называются *сопряженными*.

3. Шесть точекъ въ инволюціи обладаютъ двоякаго рода свойствами, изъ которыхъ одни мы называемъ *ариѳметическими*, потому что они состоятъ въ соотношеніяхъ между различными отрѣзками, заключающимися между этими точками; другія свойства мы назовемъ *геометрическими*, потому что они относятся къ извѣстнымъ фигурамъ, которыя можно построить на этихъ шести точкахъ, или въ которыхъ обнаруживается инволюція шести точекъ.

Свойства ариѳметическія.

4. Предыдущее уравненіе приводитъ къ двумъ слѣдующимъ:

$$\frac{BA.\ BA'}{BC.\ BC'}=\frac{B'A.\ B'A'}{B'C.\ B'C'}$$

$$\frac{AB.\ AB'}{AC.\ AC'}=\frac{A'B.\ A'B'}{A'C.\ A'C'} \qquad (A)$$

Такимъ образомъ каждое изъ трехъ уравненій (A) заключаетъ въ себѣ два другія.

5. Свойство шести точекъ быть въ инволюціи можетъ быть выражено уравненіемъ, содержащимъ только шесть изъ образуемыхъ имъ отрѣзковъ, именно:

$$AB'.\ BC'.\ CA'=AC'.\ CB'.\ BA',$$

или

$$AB'.\ BC.\ C'A'=AC.\ C'B'.\ BA', \qquad (B)$$

или

$$AB.\ B'C'.\ CA'=AC'.\ CB.\ B'A',$$

или

$$AB.\ B'C.\ C'A'=AC.\ C'B.\ B'A',$$

Такимъ образомъ каждое изъ уравненій (B) выражаетъ *инволюцію* шести точекъ и ведетъ за собою три другія.

6. Уравненія (B) легко выводятся изъ уравненій (A) посредствомъ перемноженія; и обратно, послѣднія также легко выводятся изъ уравненій (B). Но такъ какъ каждое изъ этихъ семи уравненій само по себѣ выражаетъ инволюцію, то необходимо также, чтобы изъ каждаго уравненія могли быть выведены остальныя уравненія той же группы, т. е. изъ одного уравненія (A) два другія и изъ одного уравненія (B)—три остальныя. И дѣйствительно, этого можно достигнуть вычисленіемъ, замѣняя надлежащимъ образомъ

различные отрѣзки, входящіе въ составъ разсматриваемаго уравненія. Но подобное подтвержденіе *a posteriori* приходится дѣлать ощупью; оно продолжительно и вовсе не изящно.

Поэтому, для доказательства, что каждое изъ семи уравненій (A) и (B) заключаетъ въ себѣ шесть другихъ, пользуются однимъ геометрическимъ свойствомъ шести точекъ въ инволюціи, именно тѣмъ, что черезъ нихъ можно провести четыре стороны и двѣ діагонали четыреугольника. Такъ поступали Бріаншонъ и Понселе.

Мы нашли, что понятіе объ *ангармоническомъ отношеніи* четырехъ точекъ ведетъ къ болѣе прямому и еще болѣе простому доказательству и доставляетъ много другихъ соотношеній, которыя также какъ уравненія (A) и (B); будутъ имѣть свою долю пользы. Объ этомъ предметѣ мы будемъ говорить во второй части настоящаго Примѣчанія.

7. Уравненія (A) между восемью отрѣзками составляются очень просто. Но не такъ легко съ перваго взгляда замѣтить и выразить составъ уравненій (B), въ каждое изъ которыхъ входятъ только шесть отрѣзковъ. Вотъ правило, которое, намъ кажется, безъ большаго труда можно удержать въ памяти.

Возьмемъ три точки A, B, C, принадлежащія къ тремъ парамъ; каждая изъ нихъ въ совокупности съ точками, сопряженными двумъ другимъ, опредѣляетъ два отрѣзка; такихъ отрѣзковъ будетъ слѣдовательно шесть; *произведеніе трехъ изъ этихъ отрѣзковъ, не имѣющихъ общихъ конечныхъ точекъ, равно произведенію трехъ остальныхъ.*

8. Разсмотримъ четвертую пару сопряженныхъ точекъ D и D' и положимъ, что онѣ составляютъ инволюцію съ четырьмя точками A, A' и B, B'; будемъ имѣть уравненіе

$$\frac{AB.\ AB'}{AD.\ AD'}=\frac{A'B.\ A'B'}{A'D.\ A'D'}.$$

Сравнивая это уравненіе съ третьимъ изъ уравненій (A), найдемъ:

$$\frac{AC.\ AC'}{AD.\ AD'}=\frac{A'C.\ A'C'}{A'D.\ A'D'}$$

Это показываетъ, что шесть точекъ A, A', C, C' и D, D' находятся въ инволюціи.

Отсюда проистекаетъ слѣдующее общее свойство инволюціи шести точекъ:

Если на прямой линіи имѣемъ нѣсколько паръ точекъ, изъ которыхъ двѣ первыя пары составляютъ инволюцію съ каждою изъ остальныхъ, то какія угодно три пары также составляютъ инволюцію.

Эта теорема ведетъ ко многимъ слѣдствіямъ, весьма важнымъ для теоріи инволюціи.

9. Вотъ, напримѣръ, одно изъ слѣдствій, ведущихъ къ полезнымъ приложеніямъ.

Если на прямой линіи имѣемъ четыре пары точекъ, изъ которыхъ каждыя три пары образуютъ инволюцію, то ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ, принадлежащихъ четыремъ парамъ, равно ангармоническому отношенію четырехъ остальныхъ точекъ.

Это значитъ, что для четырехъ паръ A и A', B и B', C и C', D и D' будемъ имѣть

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{A'C'}{A'D'} : \frac{B'C'}{B'D'}.$$

Дѣйствительно, три первыя пары образуютъ, какъ сказано, инволюцію, а потому (уравненія B):

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'} \cdot \frac{AB'}{A'B};$$

точно также, вслѣдствіе инволюціи трехъ паръ A и A', B и B', D и D', будемъ имѣть:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{A'D'}{B'D'} \cdot \frac{AB'}{A'B}.$$

Дѣля почленно эти уравненія, получимъ то, которое доказываемъ.

10. Изслѣдуемъ нѣкоторые частные случаи инволюціи шести точекъ.

Если предположимъ, что двѣ точки C, C' сливаются въ одну, которую означимъ черезъ E, то уравненія (A) и (B) обратятся въ слѣдующія четыре:

$$\frac{AB.\ AB'}{A'B.\ A'B'}=\frac{AE^2}{A'E^2}$$

$$\frac{BA.\ BA'}{B'A.B'A'}=\frac{BE^2}{B'E^2}$$

$$\frac{EA.\ EB}{EA'.\ EB'}=\frac{AB}{A'B'}$$

$$\frac{EA'.\ EB'}{EA'.EB}=\frac{AB'}{A'B}.$$

Каждое изъ этихъ четырехъ уравненій заключаетъ въ себѣ три остальныя.

Дезаргъ, который изслѣдовалъ этотъ случай, назвалъ его *инволюціею* пяти точекъ.

Мы будемъ называть точку E—*двойною* точкою.

11. Предположимъ теперь, что точка C' удалена въ безконечность и сопряженную ей точку означимъ, вмѣсто C, черезъ O; уравненія (A) и (B) обратятся въ слѣдующія:

$$OA.\ OA'=OB.\ OB'$$

$$\frac{BA.\ BA'}{B'A.\ B'A'}=\frac{BO}{B'O}$$

$$\frac{AB.\ AB'}{A'B.\ A'B'}=\frac{AO}{A'O}.$$

$$\frac{AB'}{A'B}=\frac{OB'}{OA'}$$

$$\frac{AB'}{A'B}=\frac{OA}{OB}$$

$$\frac{AB}{A'B}=\frac{OB}{OA'}$$

$$\frac{AB}{AB'}=\frac{OA}{OB'}$$

Каждое изъ этихъ семи уравненій заключаетъ въ себѣ шесть другихъ и въ отдѣльности выражаетъ инволюцію пяти точекъ A, A', B, B' и O. Характеристическая особенность точки O состоитъ въ томъ, что ея сопряженная точка находится въ безконечности.

Мы назовемъ эту точку *центральною* точкою двухъ паръ A, A' и B, B'.

Положеніе центральной точки опредѣлено каждымъ изъ семи предыдущихъ уравненій. Первое изъ нихъ показываетъ, что *произведеніе разстояній этой точки отъ двухъ первыхъ сопряженныхъ точекъ равно произведенію разстояній ея отъ двухъ другихъ сопряженныхъ точекъ*; изъ этого предложенія мы выведемъ сейчасъ замѣчательное свойство инволюціи шести точекъ.

12. Пусть A, A', B, B' и C, C' будутъ шесть точекъ и O центральная точка по отношенію къ первымъ четыремъ, такъ что $OA.OA'=OB.OB'$. Назовемъ на одно мгновеніе черезъ O' сопряженную ей точку, находящуюся въ безконечности. Шесть точекъ A, A', B, B' и O, O' составляютъ инволюцію. Поэтому изъ теоремы n^0 8 слѣдуетъ, что двѣ пары C, C' и O, O' образуютъ инволюцію съ каждою изъ двухъ другихъ паръ, напримѣръ съ A, A'. Слѣдовательно точка O есть также *центральная* для двухъ паръ A, A' и C, C'. Такимъ образомъ получаемъ $OA.\ OA'=OC.\ OC'$. Но мы уже имѣли $OA.\ OA'=OB.\ OB'$ и потому можемъ высказать такую теорему:

Когда три пары точекъ составляютъ инволюцію, то всегда существуетъ такая точка, для которой произведенія ея разстояній отъ двухъ точекъ каждой пары одинаковы.

Обратно: *Если на прямой линіи будемъ брать пары точекъ, для которыхъ произведеніе разстояній отъ какой-нибудь неподвижной точки O этой прямой постоянно, то три пары такихъ точекъ будутъ въ инволюціи.*

Если первыя точки будутъ при этомъ взяты по одну сторону точки O, то также точно надобно брать и двѣ другія пары, чтобы произведенія ихъ разстояній имѣли одинаковый знакъ; тоже нужно замѣтить и въ такомъ случаѣ, когда двѣ первыя точки берутся съ противоположныхъ сторонъ точки O.

Прибавленіе.

12 *bis*). Изъ теоремы n^0 12 слѣдуетъ, что, если три пары точекъ A, A', B, B' и C, C' гармонически сопряжены относительно двухъ постоянныхъ точекъ E, F, то шесть точекъ A, A', B, B', C, C' находятся въ инволюціи.

Дѣйствительно, пусть O будетъ средина отрѣзка EF, тогда

$$OA.\ OA'=OE^2,\ OB.\ OB'=OE^2,\ OC.\ OC'=OE^2.$$

Слѣдовательно шесть точекъ A, A', B; B', C, C' составляютъ инволюцію (n^0 12).

13. Предыдущая теорема еще не обратила, кажется, достаточнаго вниманія тѣхъ, кто писалъ объ этомъ предметѣ; но по моему мнѣнію, она выражаетъ самое простое свойство инволюціи шести точекъ; въ большинствѣ геометрическихъ изысканій инволюція обнаруживается посредствомъ этого именно свойства.

Точку O, разсматриваемую относительно шести точекъ въ инволюціи, мы будемъ называть *центральною* точкою инволюціи.

14. Центральная точка естественнымъ образомъ ведетъ къ *двойнымъ* точкамъ, о которыхъ мы уже говорили, и показываетъ, что эти точки могутъ быть мнимыми.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть A, A', B, B' будутъ четыре первыя точки инволюціи. Ихъ достаточно для опредѣленія центральной точки O. Если двѣ точки A, A' лежатъ по одну сторону точки O, то также будутъ лежать точки B, B' и двѣ другія точки C, C', дополняющія инволюцію. Поэтому можно предположить, что двѣ послѣднія точки сливаются въ одну, которую мы означимъ черезъ E; для опредѣленія этой точки получаемъ уравненіе

$$OA.\ OA'=OB.\ OB'=OE^2.$$

Точка E можетъ быть взята и съ той и съ другой стороны относительно O и слѣдовательно подобныхъ точекъ будетъ двѣ.

Итакъ, если даны четыре первыя точки A, A' и B, B', то инволюція двоякимъ образомъ можетъ быть пополнена пятою точкою, которая разсматривается какъ двойная.

Но если предположимъ, что двѣ первыя точки A, A' лежатъ по разныя стороны точки O, то будетъ то же самое для точекъ B, B'

и C, C', дополняющихъ инволюцію; по этому двѣ послѣднія точки никогда не могутъ совпадать. Такимъ образомъ въ этомъ случаѣ не существуетъ *двойныхъ* точекъ; анализъ далъ бы для построенія ихъ мнимое выраженіе.

15. Пусть A, A', B, B' и C, C' будутъ шесть точекъ въ инволюціи и положимъ, что двѣ первыя точки находятся по одну сторону центральной точки O; можно найти двѣ точки E и F, лежащія по ту и другую сторону отъ точки O, для которыхъ

$$OE^2 = OF^2 = OA \,.\, OA'.$$

Это двойное равенство показываетъ, что точки E, F суть гармонически сопряженныя относительно двухъ точекъ A, A'.

Но мы имѣемъ въ то же время

$$OE^2 = OF^2 = OB \,.\, OB';$$

поэтому точки E, F также гармонически сопряженныя относительно B. B', и такимъ же образомъ слѣдовательно относительно C, C'. Отсюда проистекаетъ слѣдующее, уже извѣстное, свойство инволюціи шести точекъ: *существуютъ двѣ точки гармонически сопряженныя относительно двухъ точекъ каждой изъ трехъ паръ, составляющихъ инволюцію.* Эти двѣ точки лежатъ по ту и по другую сторону отъ центральной точки и на одинаковомъ разстояніи отъ нея. Онѣ могутъ впрочемъ быть мнимыми.

16. Не трудно видѣть, что если точки B, B' лежатъ обѣ внутри отрѣзка AA', или обѣ внѣ этого отрѣзка, то двойныя точки E,F будутъ дѣйствительныя.

Наоборотъ, если одна изъ точекъ B,B' будетъ лежать на отрѣзкѣ AA', а другая на его продолженіи, то двойныя точки будутъ мнимыя.

Въ самомъ дѣлѣ, въ первомъ случаѣ точка O, которая всегда дѣйствительна, очевидно, будетъ лежать внѣ отрѣзковъ AA', BB', иначе уравненіе $OA.OA' = OB.OB'$ не могло бы имѣть мѣста; поэтому точки A,A' будутъ находиться по одну сторону отъ O и слѣдовательно двѣ точки E,F будутъ дѣйствительныя.

Во второмъ случаѣ точка O будетъ, очевидно, лежать на общей части отрѣзковъ AA', BB'; точки A, A' будутъ на разныхъ сторо-ронахъ отъ O и слѣдовательно точки E, F будутъ мнимыя [31]).

17. Двѣ точки E, F обладаютъ другимъ характеристическимъ свойствомъ, которое было доказано Аполлоніемъ въ его сочиненіи *de sectione determinata*, какъ это видно изъ предложеній 61, 62 и 64 седьмой книги Математическаго Собранія Паппа; свойство это состоитъ въ томъ, что отношеніе

$$\frac{EA.\,EA'}{EB.\,EB'}\left(\text{или } \frac{FA.\,FA'}{FB.\,FB'}\right)$$

есть *maximum*, или *minimum*. Это значитъ, что если возьмемъ какую-нибудь другую точку m, то отношеніе

$$\frac{mA.\,mA'}{mB.\,mB'}$$

достигаетъ *maximum*, или *minimum*, когда точка m сливается съ одною изъ точекъ E, F, гармонически сопряженныхъ какъ относительно A, A', такъ и относительно B, B'.

18. Двѣ пары точекъ A, A' и B, B' и ихъ центральная точка O имѣютъ еще слѣдующее свойство, которое доказано у Паппа (предложенія 45, 46,..... и 56 седьмой книги Математическаго Собранія):

Если на прямой AB, или на ея продолженіи, возьмемъ какую-нибудь точку m, то всегда будемъ имѣть соотношеніе

$$mA.\,mA' - mB.\,mB' = (AB + A'B').\,mO.$$

[31]) Понселе для такого же изслѣдованія точекъ E, F употребилъ другой способъ, воспользовавшись геометрическимъ построеніемъ, служащимъ для опредѣленія этихъ точекъ (См. *Traité des Propriétés projectives*, p. 201).

Если возьмемъ средины α, β отрѣзковъ AA', BB', то это соотношеніе приметъ такой видъ:

$$mA.mA' - mB.mB' = 2\alpha\beta.mO.$$

19. Предпологая, что точка m сливается послѣдовательно съ A, A', B, B', получимъ, какъ частные случаи, соотношенія между пятью точками A, A', B, B' и O, которыя также были доказаны Паппомъ въ предложеніяхъ 41, 42 и 43.

Свойства геометрическія.

20. Самое древнее геометрическое свойство инволюціи шести точекъ находимъ у Паппа въ 130-мъ предложеніи седьмой книги, изъ котораго видно, что если четыре стороны и двѣ діагонали четыреугольника пересѣчены какою-нибудь сѣкущею въ шести точкахъ A,A', B,B' и C,C', изъ которыхъ двѣ первыя относятся къ двумъ противоположнымъ сторонамъ, двѣ слѣдующія къ другимъ двумъ противоположнымъ сторонамъ, наконецъ двѣ послѣднія къ двумъ діагоналямъ, то отрѣзки, получаемыя между этими точками, удовлетворяютъ уравненіямъ (B).

Изъ этого предложенія очевидно слѣдуетъ, что и обратно, если одно изъ уравненій (B) имѣетъ мѣсто, то черезъ шесть точекъ можно провести четыре стороны и двѣ діагонали четыреугольника; а отсюда заключаемъ, что тогда, на основаніи предложенія Паппа, и три остальныя уравненія (B) будетъ удовлетворяться.

Вотъ какимъ образомъ при помощи геометрическаго предложенія Паппа доказывается ариѳметическое свойство инволюціи шести точекъ, состоящее въ томъ, что каждое изъ уравненій (B) заключаетъ въ себѣ остальныя.

Такъ какъ отъ сочетанія этихъ уравненій получаются прямо уравненія (A), то въ этомъ же предложеніи Паппа заключается доказательство того, что шесть точекъ пересѣченія произвольной сѣкущей съ четырьмя сторонами и двумя діагоналями четыреугольника удовлетворяютъ соотношеніямъ, выраженнымъ уравненіями (A).

21. Доказательство теоремы Паппа не трудно; но, пользуясь тѣмъ, что инволюціонное отношеніе проективно, можно еще болѣе

упростить это доказательство, пролагая четыреугольникъ такъ, что бы онъ обратился въ параллелограммъ.

Такимъ способомъ доказалъ эту теорему Бріаншонъ въ мемуарѣ о кривыхъ втораго порядка.

22. Соотношенія (*A*) между восемью отрѣзками не были, кажется, извѣстны Паппу. Между его предложеніями о четыреугольникѣ, пересѣченномъ трансверсалью, есть только одно, принадлежащее къ этимъ соотношеніямъ: это одинъ изъ частныхъ случаевъ. Сѣкущая проводится черезъ точку встрѣчи противоположныхъ сторонъ параллельно одной изъ діагоналей (предложеніе 133). Два предыдущія предложенія можно также разсматривать, какъ частные случаи соотношеній (*A*); но такъ какъ они слѣдуютъ тотчасъ послѣ предложенія 130 и составляютъ также его частные случаи, то мы должны отнести ихъ къ этому предложенію и разсматривать какъ слѣдствія соотношеній (*B*), выраженныхъ въ этомъ 130-мъ предложеніи.

23. Уравненія (*A*) стали, кажется, извѣстны не ранѣе Дезарга; этотъ геометръ ими именно характеризовалъ *инволюцію шести точекъ* по поводу слѣдующей прекрасной теоремы, которая сдѣлалась такъ плодотворна въ новѣйшей геометріи, именно:

Если четыреугольникъ вписанъ въ коническое сѣченіе, то точки пересѣченія какой-нибудь сѣкущей съ кривою и съ четырьмя сторонами четыреугольника находятся въ инволюціи.

Эту теорему очень легко доказать посредствомъ простыхъ геометрическихъ соображеній [32]).

24. Изъ нея послѣдовательно выводятся двѣ слѣдующія, болѣе общія, теоремы.

Два коническія сѣченія описаны около четыреугольника; проведемъ какую-нибудь сѣкущую, встрѣчающуюся въ четырехъ точкахъ съ двумя противоположными сторонами четыреугольника: эти шесть точекъ будутъ въ инволюціи.

Всякая сѣкущая пересѣкается съ тремя коническими сѣченіями описанными около одного и того же четыреугольника, въ шести точкахъ, составляющихъ инволюцію.

---

32) См. Примѣчаніе XV.

Эти двѣ теоремы представляютъ, какъ мы видимъ, обобщеніе теоремы Дезарга, которая вытекаетъ изъ нихъ, какъ слѣдствіе. Онѣ были въ первый разъ доказаны аналитически Штурмомъ. [33]).

25. Послѣдняя теорема можетъ служить для доказательства многихъ свойствъ, названныхъ нами *ариѳметическими* свойствами инволюціи шести точекъ. Для этого, кромѣ трехъ первыхъ коническихъ сѣченій, можно разсматривать еще различныя другія коническія сѣченія, проходящія черезъ тѣ же четыре точки; каждое изъ нихъ будетъ опредѣляться пятымъ условіемъ. Если проведемъ коническое сѣченіе, которое при этомъ касается сѣкущей то найдемъ *двойныя* точки; коническое сѣченіе, имѣющее асимптоту параллельную сѣкущей, укажетъ *центральную* точку и т. п.

26. Весьма важное свойство инволюціи шести точекъ состоитъ въ томъ, что, *если изъ произвольной точки проведемъ прямыя къ этимъ шести точкамъ, то тѣже инволюціонныя соотношенія* (*A*) и (*B*), *которыя имѣютъ мѣсто для отрѣзковъ между точками, будутъ существовать между синусами угловъ, образуемыхъ шестью линіями, заключающими эти отрѣзки.*

Обыкновенно доказываютъ это свойство, выражая отрѣзки въ функціи синусовъ соотвѣтственныхъ угловъ. Но теорія ангармоническаго отношенія четырехъ точекъ доставляетъ болѣе простое доказательство. Для этого достаточно замѣтить, что каждое изъ инволюціонныхъ соотношеній (*A*) и (*B*) представляетъ равенства ангармоническихъ отношеній (какъ мы это покажемъ во второй части этого Примѣчанія). Но эти отношенія сохраняютъ свою величину, когда въ нихъ вмѣсто отрѣзковъ подставляются синусы соотвѣственныхъ угловъ; слѣдовательно инволюціонныя отношенія существуютъ также между синусами угловъ, образуемыхъ шестью прямыми.

Обратно, если подобное соотношеніе существуетъ между синусами угловъ, образуемыхъ шестью прямыми, выходящими изъ одной точки, то всякая сѣкущая пересѣчется съ этими шестью прямыми въ шести точкахъ въ инволюціи.

---

[33]). *Annales de Mathématiques, t.* XVII, p 180

Въ такомъ случаѣ говорятъ, что шесть прямыхъ образуютъ *пучекъ въ инволюціи.*

27. Таковы напримѣръ шесть касательныхъ, проведенныхъ изъ одной точки къ тремъ коническимъ сѣченіямъ, вписаннымъ въ одинъ четыреугольникъ.

28. Прямую, соединяющую двѣ противоположныя вершины четыреугольника, можно разсматривать, какъ коническое сѣченіе, одна изъ осей котораго равна нулю; прямую соединяющую двѣ другія вершины,— какъ второе коническое сѣченіе; наконецъ прямую, соединяющую точки встрѣчи противоположныхъ сторонъ, какъ третье коническое сѣченіе. Тогда изъ общей, только что высказанной, теоремы мы получимъ многія слѣдствія; одно изъ нихъ составляетъ слѣдующую теорему:

Шесть прямыхъ, проведенныхъ изъ одной точки къ четыремъ вершинамъ и къ двумъ точкамъ пересѣченія противоположныхъ сторонъ четыреугольника, составляютъ пучекъ въ инволюціи; такъ что каждая сѣкущая встрѣчается съ этими шестью прямыми въ шести точкахъ, составляющихъ инволюцію.

29. У Паппа мы находимъ только одно предложеніе, которое можно отнести къ этой теоремѣ, именно 135-е предложеніе седьмой книги. Надобно предположить, что двѣ стороны четыреугольника параллельны между собою и что сѣкущая также параллельна имъ и проведена черезъ точку пересѣченія двухъ другихъ сторонъ.

30. Намъ кажется, что инволюціонное соотношеніе должно очень часто встрѣчаться во многихъ геометрическихъ теоріяхъ, преимущественно въ теоріи коническихъ сѣченій. Между тѣмъ до сихъ поръ его разсматривали только въ системѣ трехъ коническихъ сѣченій вписанныхъ или описанныхъ около четыреугольника и въ частныхъ случаяхъ такой системы.

Мы покажемъ въ концѣ второй части этого Примѣчанія, что соотношеніе это можетъ встрѣчаться во многихъ другихъ обстоятельствахъ.

Вторая часть.

31. Свойства инволюціи шести точекъ, изложенныя въ первой части этого Примѣчанія, составляютъ, кажется, все, что до сихъ поръ было извѣстно; я не знаю даже, было ли опредѣлительно высказано существованіе *центральной* точки и важность ея роли въ этой теоріи.

Но инволюція шести точекъ обладаетъ многими другими свойствами и можетъ, кромѣ уравненій (A) и (B), выражаться въ различныхъ другихъ формахъ, которыя могутъ оказаться полезными при геометрическихъ изслѣдованіяхъ.

Самое важное свойство инволюціоннаго соотношенія, служащее по нашему мнѣнію источникомъ всѣхъ другихъ свойствъ, основывается на понятіи объ *ангармоническомъ* отношеніи. Это основное свойство позволяетъ дать новое опредѣленіе инволюціи шести точекъ, опредѣленіе, которое заключаетъ въ себѣ въ одно время оба рода уравненій (A) и (B) и естественнымъ образомъ ведетъ къ различнымъ другимъ выраженіямъ инволюціи шести точекъ.

32. Мы скажемъ, что

Шесть точекъ, попарно сопряженныхъ, находятся въ инволюціи, когда ангармоническое отношеніе четырехъ изъ нихъ равно ангармоническому отношенію имъ сопряженныхъ точекъ.

Такъ, шесть точекъ A, B, C, A', B', C', изъ которыхъ три A', B', C' сопряжены тремъ первымъ, будутъ въ инволюціи, когда ангармоническое отношеніе четырехъ A, B, C и C' равно ангармоническому отношенію ихъ сопряженныхъ A', B', C' и C; т. е. когда имѣемъ одно изъ трехъ уравненій:

$$\frac{CA}{CB} : \frac{C'A}{C'B} = \frac{C'A'}{C'B'} : \frac{CA'}{CB'}$$

$$\frac{CA}{CC'} : \frac{BA}{BC'} = \frac{C'A'}{C'C} : \frac{B'A'}{B'C}$$

$$\frac{CB}{CC'} : \frac{AB}{AC'} = \frac{C'B'}{C'C} : \frac{A'B'}{A'C}$$

или

$$\frac{CA.CA'}{CB.CB'}=\frac{C'A.C'A'}{C'B.C'B'}$$

$$CA.A'B'.BC'=C'A'.AB.B'C$$

$$CB.B'A'.BC'=C'B'.AB.A'C.$$

Каждое изъ этихъ трехъ уравненій заключаетъ въ себѣ два остальныя, потому что каждое выражаетъ, что четыре точки A, B, C, C' имѣютъ тоже ангармоническое отношеніе, какъ и четыре имъ соотвѣтствующія точки A', B', C', C.

Такимъ образомъ наше опредѣленіе инволюціи шести точекъ даетъ три уравненія, изъ которыхъ каждое заключаетъ въ себѣ два другія и достаточно для выраженія инволюціи.

33. Легко видѣть, что каждое изъ этихъ трехъ уравненій ведетъ еще къ четыремъ другимъ, которыя вмѣстѣ съ тремя первыми составляютъ уравненія (A) и (B).

Дѣйствительно, одно изъ уравненій, напримѣръ

$$CA.A'B'.BC'=C'A'.AB.B'C,$$

можно написать троякимъ образомъ въ видѣ равенства ангармоническихъ отношеній; первый способъ даетъ второе уравненіе изъ первой группы вышеприведенныхъ уравненій; два другіе приведутъ къ уравненіямъ:

$$\frac{CA}{CB'}:\frac{BA}{BB'}=\frac{C'A'}{C'B}:\frac{B'A'}{B'B}$$

$$\frac{CA}{CB'}:\frac{A'A}{A'B}=\frac{C'A'}{C'B}:\frac{AA'}{AB}.$$

Первое изъ этихъ уравненій показываетъ, что четыре точки A, B, C, B' имѣютъ такое же ангармоническое отношеніе, какъ и четыре имъ соотвѣтствующія точки A', B', C', B поэтому мы имѣемъ еще два уравненія:

$$\frac{CA}{CB}:\frac{B'A}{B'B}=\frac{C'A'}{C'B'}:\frac{BA'}{BB'}$$

$$\frac{CB}{CB'}:\frac{AB}{AB'}=\frac{C'A'}{C'B}:\frac{A'B'}{A'B};$$

или

$$CA.A'B.B'C'=C'A'.AB'.BC$$

$$\frac{BA.BA'}{BC.BC'}=\frac{B'A.B'A'}{B'C.B'C'}.$$

Подобнымъ же образомъ второе изъ тѣхъ уравненій показываетъ, что четыре точки A, B', C, A' имѣютъ одинаковое ангармоническое отношеніе съ четырьмя соотвѣтствующими имъ точками A', B, C', A и потому мы имѣемъ два другія уравненія:

$$\frac{CA}{CA'}:\frac{B'A}{B'A'}=\frac{C'A'}{C'A}:\frac{BA'}{BA}$$

$$\frac{CB'}{CA'}:\frac{AB'}{AA'}=\frac{C'B}{C'A}:\frac{A'B}{A'A};$$

или

$$\frac{AC.AC'}{AB.AB'}=\frac{A'C.A'C'}{A'B.A'B'}$$

$$CB'.BA'.AC'=C'B.B'A.A'C.$$

Итакъ семь уравненій (A) и (B) слѣдуютъ изъ даннаго нами опредѣленія инволюціи шести точекъ.

34. Мы видѣли, что уравненіе

$$CA.A'B'.BC'=C'A'.AB.B'C$$

выражаетъ въ одно и то же время три равенства ангармоническихъ отношеній; именно для четырехъ точекъ A, B, C, C' и ихъ соотвѣтствующихъ A', B', C', C; для четырехъ точекъ A, B, C, B' и ихъ соотвѣтствующихъ; наконецъ для четырехъ точекъ A, B', C, A' и ихъ соотвѣтствующихъ.

Каждое другое изъ уравненій (B) точно также выражаетъ равенство ангармоническихъ отношеній въ трехъ различныхъ

группахъ четырехъ точекъ и нетрудно замѣтить, что каждое изъ уравненій (A) также выражаетъ равенство ангармоническихъ отношеній для двухъ группъ. Отсюда заключаемъ, что *если шесть точекъ A и A', B и B', C и C' находятся въ инволюціи, то четыре какія нибудь изъ нихъ, принадлежащія къ тремъ парамъ, имѣютъ ангармоническое отношеніе одинаковое съ соотвѣтствующими имъ точками.*

35. Мы говоримъ, что три изъ четырехъ первыхъ точекъ должны принадлежать тремъ парамъ, потому что иначе двѣ изъ шести точекъ не вошли бы въ уравненіе, выражающее равенство ангармоническихъ отношеній. Такъ напримѣръ, если бы первыя четыре точки были A, B, A', B', то соотвѣтствующія имъ точки были бы A', B', A, B; и, сравнивая ангармоническія отношенія тѣхъ и другихъ четырехъ точекъ, мы не получили бы соотношенія между шестью данными точками, такъ какъ въ него не вошли бы точки C и C'. Но полученное уравненіе было бы тождественно. Поэтому мы можемъ изложить теорему въ слѣдующемъ общемъ видѣ:

Когда шесть точекъ, попарно соотвѣтствующихъ другъ другу, находятся въ инволюціи, то ангармоническое отношеніе какихъ нибудь четырехъ изъ нихъ равно ангармоническому отношенію четырехъ имъ соотвѣтствующихъ точекъ.

Эта теорема, какъ намъ кажется, выражаетъ самое богатое слѣдствіями свойство въ теоріи инволюціи шести точекъ; она естественнымъ образомъ ведетъ къ различнымъ выраженіямъ инволюціи, которыя до сихъ поръ не были замѣчены.

Перейдемъ къ изложенію ихъ.

36. Въ предыдущемъ Примѣчаніи мы видѣли, что равенство ангармоническихъ отношеній двухъ системъ четырехъ точекъ можетъ быть тремя способами выражено посредствомъ трехчленнаго уравненія; поэтому условіе инволюціи шести точекъ можетъ быть выражено трехчленнымъ уравненіемъ въ двѣнадцати различныхъ видахъ. Четыре изъ этихъ двѣнадцати уравненій содержатъ отрѣзокъ AA' между двумя соотвѣтственными точками, четыре содержатъ отрѣзокъ BB', наконецъ четыре—отрѣзокъ CC'.

Вотъ четыре первыя изъ этихъ двѣнадцати уравненій:

$$\frac{AB.AC}{AA'.BC}+\frac{AB'.A'C'}{AA'.B'C'}=1$$

$$\frac{AB.AC'}{AA'.BC'}+\frac{AB'.A'C}{AA'.B'C}=1$$

$$\frac{AC.A'B}{AA'.CB}+\frac{AC'.A'B'}{AA'.C'B'}=1 \qquad (C)$$

$$\frac{AC.A'B'}{AA'.CB'}+\frac{AC'.A'B}{AA'.C'B}=1.$$

Точно такимъ же образомъ составятся четыре уравненія, въ которыя войдетъ отрѣзокъ BB' и четыре другія, въ которыя войдетъ отрѣзокъ CC'.

Всего двѣнадцать уравненій, изъ которыхъ каждое заключаетъ въ себѣ одиннадцать остальныхъ. Каждое изъ нихъ содержитъ восемь отрѣзковъ, изъ которыхъ семь различны между собою.

37. Имѣемъ еще восемь слѣдующихъ уравненій, которыя отличаются отъ предыдущихъ, хотя состоятъ также изъ трехъ членовъ и содержатъ, каждое, восемь отрѣзковъ, изъ которыхъ семь различны между собою:

$$1. \ldots\ldots \frac{AC.AC'}{AB.AB'}+\frac{BC.BC'}{BA.BA'}=1$$

$$2. \ldots\ldots \frac{AB.AB'}{AC.AC'}+\frac{CB.CB'}{CA.CA'}=1$$

$$3. \ldots\ldots \frac{A'C.A'C'}{A'B.A'B'}+\frac{BC.BC'}{BA'.BA}=1$$

$$4. \ldots\ldots \frac{A'B.A'B'}{A'C.A'C'}+\frac{CB.CB'}{CA'.CA}=1$$

(D)

$$1' \dots \frac{AC.AC'}{AB'.AB} + \frac{B'C.B'C'}{B'A.B'A'} = 1$$

$$2' \dots \frac{AB.AB'}{AC'.AC} + \frac{C'B.C'B'}{C'A.C'A'} = 1$$

$$3' \dots \frac{A'C.A'C'}{A'B'.A'B} + \frac{B'C.B'C'}{B'A'.B'A} = 1$$

$$4' \dots \frac{A'B.A'B'}{A'C'.A'C} + \frac{C'B.C'B'}{C'A'.C'A} = 1.$$

Четыре послѣднія изъ этихъ уравненій, означенныя нумерами 1', 2', 3', 4', выводятся соотвѣтственно изъ четырехъ первыхъ, означенныхъ нумерами 1, 2, 3, 4, при помощи уравненій (A).

Ниже (n^0 45) мы дадимъ доказательство этихъ восьми уравненій.

38. Вотъ формула другаго вида, выражающая инволюцію шести точекъ посредствомъ четырехчленнаго уравненія между шестью различными отрѣзками.

Означимъ чрезъ α, β, γ средины отрѣзковъ AA', BB', CC' и положимъ, что эти точки расположены въ порядкѣ α, β, γ; тогда существуетъ соотношеніе:

$$\alpha A^2.\beta\gamma - \beta B^2.\alpha\gamma + \gamma C^2\alpha\beta = \alpha\beta.\beta\gamma.\gamma\alpha. \qquad (E)$$

Это уравненіе единственно; т. е. не существуетъ другаго подобной же формы.

Доказательство его получится (n^0 46) изъ другаго общаго соотношенія, которое мы сейчасъ покажемъ.

39. Когда двѣ точки C, C' сливаются въ одну точку E, то предыдущее уравненіе обращается въ

$$\alpha A^2.\beta E - \beta B^2.\alpha E = \alpha\beta.\alpha E.\beta E.$$

Если точки B, B' также сливаются въ F, то выходитъ

$$\alpha A^2 = \alpha E.\alpha F.$$

Это одна изъ формулъ выражающихъ, что точки A, A гармонически сопряжены относительно E и F.

40. Гармоническое отношеніе четырехъ точекъ можно, какъ извѣстно, выразить посредствомъ пятой произвольной точки, къ которой отнесены четыре разсматриваемыя точки. Такимъ же образомъ можно выразить инволюцію шести точекъ при помощи вспомогательной точки, къ которой отнесены эти шесть точекъ; этотъ способъ ведетъ къ безконечному множеству уравненій, изъ которыхъ каждое достаточно для выраженія инволюціи.

Пусть A и A', B и B', C и C' будутъ шесть точекъ въ инволюціи и m седьмая точка, взятая произвольно на той же прямой линіи; пусть α, β, γ будутъ средины отрѣзковъ AA', BB', CC'; положимъ что онѣ расположены въ томъ же порядкѣ, какъ мы ихъ написали; тогда будемъ имѣть соотношеніе:

$$mA.mA'.\beta\gamma - mB.mB'.\alpha\gamma + mC.mC'.\alpha\beta = 0. \qquad (F)$$

Это уравненіе существуетъ, каково бы ни было положеніе точки m.

Предполагая, что эта точка послѣдовательно сливается съ точками въ инволюціи, или съ точками α, β, γ, или съ какими нибудь другими опредѣленными точками, мы будемъ получать другія соотношенія, которыя всѣ будутъ выражать инволюцію шести точекъ.

41. Доказательство уравненія (F) не трудно. Мы покажемъ, что если это уравненіе имѣетъ мѣсто при одномъ положеніи точки m, то оно будетъ справедливо и при всякомъ другомъ положеніи этой точки; т.-е. что, назвавъ черезъ M это новое положеніе точки m, мы будемъ имѣть необходимо:

$$MA.MA'.\beta\gamma - MB.MB.\alpha\gamma + MC.MC'.\alpha\beta = 0; \qquad (F')$$

потомъ мы покажемъ, что уравненіе (F) дѣйствительно имѣетъ мѣсто при извѣстномъ положеніи точки m.

Чтобы вывести уравненіе (F') изъ (F), напишемъ.

$$mA = MA - Mm;\ mA' = MA' - Mm,$$

$$mA.mA' = MA.MA' + (MA + MA')Mm + Mm^2,$$

или

$$mA.mA' = MA.MA' - 2M\alpha.Mm - Mm^2.$$

Подобнымъ же образомъ:

$$mB.mB' = MB.MB' - 2M\beta.Mm + Mm^2,$$

и

$$mC.mC' = MC.MC' - 2M\gamma\ Mm + Mm^2.$$

Уравненіе (F) обратится въ

$$MA.MA'.\beta\gamma - MB.MB'.\alpha\gamma + MC.MC'.\alpha\beta -$$
$$2Mm.(\beta\gamma.M\alpha - \alpha\gamma.M\beta + \alpha\beta.M\gamma) + (\beta\gamma - \alpha\gamma + \alpha\beta)Mm^2 = 0.$$

Но между четырьмя точками α, β, γ, M всегда имѣемъ соотношеніе

$$\beta\gamma.M\alpha - \alpha\gamma.M\beta + \alpha\beta.M\gamma = 0,$$

какъ мы доказали это въ Примѣчаніи IX (стр. 48); точно также между точками α, β, γ существуетъ всегда соотношеніе

$$\beta\gamma - \alpha\gamma + \alpha\beta = 0;$$

слѣдовательно наше уравненіе дѣйствительно приводится къ уравненію (F).

Остается показать, что уравненіе (F) существуетъ для какого нибудь частнаго положенія точки m. Положимъ, что эта точка помѣщена въ *центральной* точкѣ инволюціи шести точекъ; въ такомъ случаѣ $mA.mA' = mB.mB' = mC.mC'$ и уравненіе наше приводится къ тождеству

$$\beta\gamma - \alpha\gamma + \alpha\beta = 0.$$

Такимъ образомъ формула (F') и подобная ей формула (F) — доказаны.

42. Въ уравненіи (F) можно замѣнить отрѣзки $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$ отрѣзками между точками A, A', B, B', C и C', потому что

$$\beta\gamma=\frac{BC+B'C'}{2}\ ;\ \alpha\gamma=\frac{AC+A'C'}{2}\ ;\ \alpha\beta=\frac{AB+A'B'}{2}\ .$$

43. Положимъ, что въ инволюціи двѣ точки C, C' сливаются въ одну E и двѣ другія B, B' также сливаются въ F; уравненіе обращается тогда въ

$$mA.mA'.EF-mF^2.\alpha E+mE^2.\alpha F=0. \qquad (G)$$

Это уравненіе выражаетъ соотношеніе между четырьмя точками A, A', E, F, изъ которыхъ двѣ первыя гармонически сопряжены относительно двухъ послѣднихъ, и между пятою произвольною точкою m.

Давая этой пятой точкѣ различныя положенія, мы получимъ различныя выраженія гармоническаго отношенія четырехъ точекъ.

44. Намъ кажется, что изъ всѣхъ извѣстныхъ до сихъ поръ выраженій инволюціи шести точекъ уравненіе (F) есть самое полное и самое богатое слѣдствіями: изъ него выводятся всѣ разнообразныя уравненія, показанныя нами выше, и многія другія, приводящія къ простымъ выраженіямъ различныхъ соотношеній между произведеніями отрѣзковъ, разсматриваемыми въ этой теоріи.

Такъ напримѣръ, предполагая, что точка m совпадаетъ съ A, получаемъ очень простое выраженіе для отношенія между $AC.\ AC'$ и $AB.AB'$, именно:

$$\frac{AC.AC'}{AB.AB'}=\frac{\alpha\gamma}{\alpha\beta}=\frac{AC+A'C'}{AB+A'B'}$$

Для отношенія

$$\frac{A'C.\ A'C'}{A'B.A'B'}$$

получимъ тоже выраженіе; отсюда проистекаютъ уравненія (A).

45. Полагая, что точка m помѣщена въ B, найдемъ:

$$\frac{BC.BC'}{BA.BA'}=-\frac{\beta\gamma}{\beta\alpha}=-\frac{BC+B'C'}{BA+B'A'}.$$

Складывая почленно это уравненіе съ предыдущимъ и замѣчая, что $\alpha\gamma-\beta\gamma=\alpha\beta$, получимъ первое изъ восьми уравненій (D).

46. Уравненіе (E) также легко выводится изъ уравненія (F). Въ самомъ дѣлѣ, между тремя точками α,β,γ и какою нибудь четвертою точкою m существуетъ слѣдующее соотношеніе, данное Стевартомъ:

$$m\alpha^2.\ \beta\gamma-m\beta^2.\ \alpha\gamma+m\gamma^2.\ \alpha\beta=\alpha\beta.\ \beta\gamma.\ \gamma\alpha.$$ [34])

Вычитая отсюда уравненіе (F), получимъ:

$$(m\alpha^2-mA.mA')\beta\gamma-(m\beta^2-mB.mB')\alpha\gamma+(m\gamma^2-mC.mC')\alpha\beta$$
$$=\alpha\beta.\beta\gamma.\gamma\alpha.$$

Но

$$m\alpha^2-\alpha A^2=(m\alpha+\alpha A)(m\alpha-\alpha A)=mA.mA';$$

откуда

$$m\alpha^2-mA.mA'=\alpha A^2.$$

Точно также

$$m\beta^2-mB.mB'=\beta B^2 \text{ и } m\gamma^2-mC.mC'=\gamma C^2.$$

Поэтому предыдущее уравненіе обращается въ

$$\alpha A^2.\beta\gamma-\beta B^2.\alpha\gamma+\gamma C^2.\alpha\beta=\alpha\beta.\beta\gamma.\gamma\alpha,$$

что и требовалось доказать.

47. Изъ уравненія (F) выводится также свойство центральной точки, которое было извѣстно Паппу (n^0 18). Для этого положимъ, что точка C' удалена въ безконечность, вслѣдствіе чего точка C обращается въ *центральную* точку O, и напишемъ уравненіе (F) въ такомъ видѣ:

---

[34]) Это вторая изъ *Some general theorems*, etc. (См. четвертую эпоху n^0 28).

$$mA.mA'-mB.mB'.\ \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma}+mC.\alpha\beta.\frac{mC'}{\beta\gamma}=0\cdot$$

Точка γ находится также въ безконечности и мы имѣемъ:

$$\frac{\alpha\beta}{\beta\gamma}=1;\ \beta\gamma=\frac{\beta C+\beta C'}{2};\frac{mC'}{\beta\gamma}=2.\frac{mC'}{\beta C+\beta C'}=\frac{2}{\frac{\beta C}{mC'}+\frac{\beta C'}{mC'}}$$

но $\frac{\beta C}{mC'}=0;\ \frac{\beta C'}{mC'}=1$; слѣдовательно $\frac{mC'}{\beta\gamma}=2$; уравненіе обращается въ

$$mA.mA'-mB.mB'+2\alpha\beta.mO=0.$$

Замѣняя $\alpha\beta$ чрезъ

$$\frac{AB+A'B'}{2};$$

получимъ уравненіе Паппа.

48. Если положимъ, что двѣ точки B,B' сливаются въ одну изъ двойныхъ точекъ инволюціи E, то это уравненіе обратится въ

$$mA.mA'-mE^2+2\alpha E.mO=0. \qquad (H)$$

49. Если двѣ точки A,A' сольются въ другой двойной точкѣ F получимъ:

$$mF^2-mE^2+m2EF.mO=0.$$

Это уравненіе выражаетъ соотношеніе между какою нибудь точкою m, точками E, F и срединою двухъ послѣднихъ.

50. Первое изъ уравненій (D) и уравненіе (H) ведутъ къ доказательству того случая *maximum*, или *minimum*, который былъ доказанъ Аполлоніемъ и о которомъ мы уже говорили (n^0 17). Дѣйствительно, первое изъ этихъ уравненій показываетъ, что отношеніе

$$\frac{AC.AC'}{AB.AB'}$$

въ которомъ A разсматривается какъ перемѣнная точка, будетъ *maximum*, или *minimum*, когда произведеніе $BA.BA'$ *minimum*, или *maximum*. Но уравненіе (H) даетъ

$$BA.BA'=BE^2-2\alpha E.BO.$$

Слѣдовательно произведеніе $BA.BA'$ будетъ *maximum* (или *minimum*, смотря по знаку), когда перемѣнный коэффиціентъ αE будетъ равенъ нулю. Тогда двѣ точаи A, A' сливаются въ одной точкѣ E; это и составляетъ предложеніе Аполлонія.

51. Инволюцію шести точекъ можно выразить уравненіемъ, въ которое войдутъ двѣ точки, взятыя, какъ та, такъ и другая, совершенно произвольно.

Пусть m и n будутъ двѣ такія точки; означимъ черезъ α точку гармонически сопряженную съ n относительно A и A', черезъ β—гармонически сопряженную съ n относительно B и B' и черезъ γ—гармонически сопряженную съ n относительно C и C'. Каковы бы ни были точки m и n, взятыя на прямой, на которой расположены точки инволюціи, мы будемъ имѣть соотношеніе:

$$\frac{mA.mA'}{nA.nA'}\cdot\beta\gamma.n\alpha-\frac{mB.mB'}{nB.nB'}\cdot\alpha\gamma.n\beta+\frac{mC.mC'}{nC.nC'}\alpha\beta.n\gamma=0. \qquad (I)$$

Если положимъ, что точка n удалена въ безконечность, то уравненіе обратится въ формулу (F). Этого замѣчанія достаточно, чтобы видѣть справедливость нашего уравненія.

52. Если помѣстимъ m въ центральной точкѣ, то будемъ имѣть $mA.mA'=mB.mB'=mC.mC'$ и соотношеніе (I) приметъ видъ:

$$\frac{\beta\gamma.n\alpha}{nA.nA'}-\frac{\alpha\gamma.n\beta}{nB.nB'}+\frac{\alpha\beta.n\gamma}{nC.nC'}=0. \qquad (J)$$

Это уравненіе отличается по формѣ отъ уравненія (F) и, подобно ему, выражаетъ инволюцію шести точекъ при помощи седьмой, произвольно взятой точки.

53. Мы сказали выше (n^0 30), что инволюціонное соотношеніе можетъ встрѣчаться при многихъ изслѣдованіяхъ, гдѣ оно до сихъ поръ не было можетъ быть замѣчено. Мы закончимъ это Примѣчаніе указаніемъ на нѣкоторые случаи, въ которыхъ это соотношеніе имѣетъ мѣсто.

1° Три пары сопряженныхъ діаметровъ коническаго сѣченія составляютъ пучекъ въ инволюціи.

2° Когда три хорды коническаго сѣченія проходятъ черезъ одну точку, то прямыя, проведенныя изъ какой нибудь точки кривой къ концамъ этихъ хордъ, находятся въ инволюціи.

3° Когда три угла, описанные около коническаго сѣченія, имѣютъ вершины на одной прямой, то стороны ихъ пересѣкаются съ какою угодно касательною коническаго сѣченія въ шести точкахъ въ инволюціи.

4° Положимъ, что четыре хорды коническаго сѣченія проходятъ черезъ одну точку; если черезъ концы первыхъ двухъ хордъ проведемъ произвольное коническое сѣченіе и черезъ концы двухъ другихъ—другое произвольное коническое сѣченіе, то четыре точки пересѣченія этихъ новыхъ коническихъ сѣченій будутъ лежать попарно на двухъ прямыхъ, проходящихъ черезъ точку пересѣченія четырехъ хордъ, и эти двѣ прямыя вмѣстѣ съ четырьмя хордами составляютъ пучекъ въ инволюціи [35]).

Если двѣ первыя хорды совпадаютъ и двѣ другія—также, то инволюціонное соотношеніе обращается въ гармоническое отношеніе и мы получаемъ такую теорему:

Когда два коническія сѣченія имѣютъ двойное прикосновеніе съ третьимъ, то они пересѣкаются между собою въ четырехъ точкахъ, расположенныхъ попарно на двухъ прямыхъ, проходящихъ черезъ точку встрѣчи двухъ хордъ прикосновенія; эти двѣ прямыя суть гармонически сопряженныя относительно двухъ хордъ прикосновенія.

---

[35]) Первую часть этой теоремы я доказалъ въ *Correspondance polytechnique* (T. III, p. 339).

5° Черезъ всякую точку, взятую въ плоскости коническаго сѣченія, можно провести двѣ такія взаимно перпендикулярныя прямыя, чтобы полюсъ одной, относительно этого коническаго сѣченія, находился на другой.

Шесть прямыхъ, проведенныхъ такимъ образомъ черезъ три точки, взятыя произвольно въ плоскости коническаго сѣченія, пересѣкаютъ каждую изъ двухъ главныхъ осей кривой въ шести точкахъ, находящихся въ инволюціи.

Центральная точка инволюціи есть центръ кривой, а двѣ *двойныя* точки — фокусы ея. Эти двѣ двойныя точки будутъ дѣйствительными на большой и мнимыми на малой оси.

Для точки, взятой на самомъ коническомъ сѣченіи, такими двумя перпедикулярными прямыми будутъ касательная и нормаль въ этой точкѣ.

Теорема представляетъ, какъ мы видимъ, общее свойство *фокусовъ* коническаго сѣченія и показываетъ, что существуетъ *четыре фокуса*, изъ которыхъ два мнимые, но они имѣютъ нѣкоторыя свойства, общія съ двумя дѣйствительными фокусами.

Для поверхностей втораго порядка мы найдемъ теорему, соотвѣтствующую этой; она будвтъ служить намъ для характеристики *нѣкоторыхъ кривыхъ линій*, имѣющихъ для этихъ поверхностей такое же значеніе, какъ *фокусы* для коническихъ сѣченій. (См. Примѣчаніе XXXI).

Инволюціонное соотношеніе можетъ также встрѣчаться въ вопросахъ высшаго порядка, чѣмъ предыдущіе. Такъ напримѣръ:

6° *Представимъ себѣ три какія нибудь кривыя поверхности, имѣющія общую точку прикосновенія и пересѣкающіяся попарно въ этой точкѣ; если проведемъ въ этой точкѣ касательныя къ двумъ вѣтвямъ каждой изъ трехъ кривыхъ пересѣченія, то эти шесть касательныхъ будутъ въ инволюціи.*

7° Наконецъ: *если черезъ образующую линейчатой поверхности проведемъ три какія нибудь плоскости, то каждая изъ нихъ будетъ касаться поверхности въ одной точкѣ и будетъ*

нормальна къ ней въ другой точкѣ: шесть подобныхъ точекъ будутъ въ инволюціи.

Каждая изъ предложенныхъ теоремъ ведетъ ко многимъ слѣдствіямъ, которыя будутъ показаны въ другомъ мѣстѣ.

54. Не можемъ окончить это Примѣчаніе, не указавъ еще на одно любопытное свойство круга, состоящее въ томъ, что шесть точекъ, взятыхъ на окружности, могутъ представлять соотношенія, подобныя инволюціи шести точекъ, расположенныхъ на прямой линіи. Это свойство выражается слѣдующей теоремой:

Когда три прямыя, исходящія изъ одной точки, встрѣчаются съ окружностью круга:—первая въ точкахъ a, a' *вторая въ* b, b', *третья въ* c, c', *— то мы имѣемъ соотношеніе:*

$$\frac{\sin\frac{1}{2}ca.\ \sin\frac{1}{2}ca'}{\sin\frac{1}{2}cb.\ \sin\frac{1}{2}cb'}=\frac{\sin\frac{1}{2}c'a.\ \sin\frac{1}{2}c'a'}{\sin\frac{1}{2}c'b.\ \sin\frac{1}{2}c'b'}.$$

Ясно, какъ составляются два другія подобныя соотношенія; такимъ образомъ получаются между шестью точками a, a'; b, b'; c, c' три уравненія, подобныя уравненіямъ (A), относящимся къ инволюціи шести точекъ на прямой линіи.

Прибавимъ, что подобнымъ же образомъ найдутся для этихъ шести точекъ соотношенія, подобныя уравненіямъ (B), (C) и (D).

ПРИМѢЧАНІЕ XI.

(*Первая эпоха, n° 38*).

О задачѣ вписать въ кругъ треугольникъ, стороны котораго должны проходить черезъ три данныя точки.

Паппъ оставилъ намъ простое рѣшеніе этой задачи для того случая, когда три точки даны на одной прямой.

Общій случай, представлявшій значительныя затрудненія, предложенъ былъ въ 1742 году Крамеромъ Кастильону, уже доказавшему свое искуство въ геометріи древнихъ. Кастильонъ нашелъ рѣшеніе этой задачи, основанное на чисто геометрическихъ соображеніяхъ; оно явилось въ Мемуарахъ Берлинской Академіи 1776 года.

Тотчасъ послѣ этого Лагранжъ далъ другое, чисто аналитическое и весьма изящное рѣшеніе. (Тотъ же томъ Берлинскихъ Мемуаровъ).

Въ 1780 году эту же задачу рѣшили Эйлеръ, Фуссъ и Лексель (Мемуары Петербургской Академіи). По поводу рѣшенія Эйлера замѣтимъ, что оно основывается на одной леммѣ, которая есть ничто иное, какъ теорема Стеварта, упомянутая нами по случаю леммъ Паппа къ сочиненію *loca plana* Аполлонія. (Первая эпоха, *n*° 36).

Молодой неаполитанецъ Олтаяно (Giordano di Oltaiano) задумалъ вопросъ въ болѣе общемъ видѣ и рѣшилъ его для многоугольника съ какимъ угодно числомъ сторонъ, проходящихъ черезъ столько же точекъ, расположенныхъ произвольно въ плоскости круга. Мальфатти не замедлилъ рѣшить эту задачу въ той же степени общности. (Мемуары этихъ геометровъ напечатаны въ IV томѣ *Memorie della societa italiana*.)

Люилье (Lhuillier) сдѣлалъ нѣкоторыя измѣненія въ рѣшеніяхъ этихъ двухъ геометровъ, въ Берлинскихъ Мемуарахъ 1796 года, и писалъ объ этой же задачѣ въ *Elemens d' analyse géométrique et d'analyse algébrique* 1809 года.

Карно, въ *Géométrie de position* возвратился къ рѣшенію Лагранжа и, введя въ него нѣкоторыя геометрическія соображенія, составилъ смѣшанное рѣшеніе, которое приложено имъ къ общему случаю какаго нибудь многоугольника.

Бріаншонъ внесъ въ эту задачу новый элементъ обобщенія: онъ вмѣсто круга взялъ какое нибудь коническое сѣченіе и рѣшилъ эту задачу для случая треугольника и въ томъ предположеніи, что данныя точки лежатъ на одной прямой. *Journal de l'école polytechnique*, 10-е cahier).

Жергоннъ сдѣлалъ новый шагъ впередъ: онъ также взялъ коническое сѣченіе, но допустилъ совершенную общность въ положеніи трехъ точекъ и при рѣшеніи задачи пользовался только *линейкою.* Во всѣхъ прежнихъ рѣшеніяхъ требовалось употребленіе *циркуля* (*Annales des Mathématiques*, t. I, p. 341, années 1810—1811). Жергоннъ не прямо изслѣдовалъ эту задачу; онъ предложилъ себѣ другую, ей подобную, именно: описать около коническаго сѣченія треугольникъ, вершины котораго лежали бы на трехъ данныхъ прямыхъ. Построеніе, данное этимъ геометромъ, требовало употребленія только *линейки* и было образцомъ изящества и простоты. Оно было доказано Servois и Rochat (*Annales des Mathématiques*, t. I, p. 337 et 342). Жергоннъ замѣтилъ, что посредствомъ теоріи *полюсовъ* коническихъ сѣченій это рѣшеніе тотчасъ же преобразовывается въ подобное же рѣшеніе задачи: вписать въ коническое сѣченіе треугольникъ, стороны котораго проходили бы черезъ данныя точки.

Оставалось, для полноты предмета, рѣшить туже задачу для коническаго сѣченія, вмѣсто круга, въ общемъ случаѣ какого нибудь многоугольника. Этимъ послѣднимъ усиліемъ мы обязаны Понселе. Рѣшеніе этого геометра достойнымъ образомъ вѣнчаетъ труды его предшественниковъ. Оно во всѣхъ отношеніяхъ представляетъ прекрасный примѣръ совершенства, до котораго могутъ достигать теоріи новой геометріи. (См. *Traité des propriétés projectives*, p. 352).

ПРИМѢЧАНІЕ XII.*)

(*Вторая эпоха*, *n⁰ 2*).

О геометріи Индѣйцевъ, Арабовъ, Римлянъ и восточныхъ народовъ въ средніе вѣка.

Предѣлы нашего сочиненія дали намъ возможность говорить только о самыхъ важныхъ открытіяхъ въ геометріи и

---

*) Въ оригиналѣ и въ нѣмецкомъ переводѣ Sohncke (1839) Примѣчаніе это помѣщено послѣ всѣхъ остальныхъ. *Пр. пер.*

преимущественно о тѣхъ, которыя послужили началомъ какой-нибудь теоріи или какого-нибудь способа новѣйшей геометріи. Вотъ почему мы начали нашу вторую эпоху съ трудовъ Вьета. Но уже за цѣлое столѣтіе до этого времени геометрія разработывалась тщательно; и если она не обогатилась открытіями первостепенной важности, подобно анализу, который въ теченіи этого вѣка расширилъ свои предѣлы до рѣшенія уравненій третьей и четвертой степени, тѣмъ не менѣе труды писателей занимавшихся геометріею подготовили великія работы геометровъ XVII вѣка и преимущественно въ томъ отношеніи, что ввели въ эту науку новый элементъ, служившій зародышемъ послѣдующихъ успѣховъ. Этотъ элементъ былъ — *алгебраическое исчисленіе*, которое не было извѣстно Грекамъ, или которое они устраняли, вслѣдствіе рѣзкаго различія, которое они полагали между ариѳметикой и геометріей. Такъ напримѣръ, они доказывали на чертежѣ и посредствомъ чисто геометрическихъ соображеній десять первыхъ предложеній второй книги Евклида, которыя въ сущности суть не болѣе какъ правила исчисленія. Этотъ элементъ составляетъ отличительный характеръ геометріи Вьета, Фермата, Декарта; поэтому, восходя до источника столь великаго и полезнаго нововведенія и слѣдя за его развитіемъ, мы должны были бросить взглядъ на первые труды геометровъ эпохи возрожденія.

Для этой цѣли назначено было это Примѣчаніе. Но, послѣ того какъ оно уже было написано, появился первый томъ *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, гдѣ Либри, въ краснорѣчивомъ предисловіи, излагаетъ развитіе наукъ у различныхъ народовъ, начиная съ самой глубокой древности. Въ сочиненіи этомъ, каждая страница котораго носитъ отпечатокъ самаго глубокаго, удивительнаго образованія, приписывается Арабамъ и Индѣйцамъ гораздо большая доля участія въ развитіи наукъ, чѣмъ это предполагалось до сихъ поръ.

Поэтому мы сочли долгомъ бросить бѣглый взглядъ на геометрическій отдѣлъ арабскихъ и индѣйскихъ сочиненій, переводы которыхъ изданы нѣсколько лѣтъ тому назадъ учены-

ми англійскими оріенталистами. И, чтобы пополнить этотъ обзоръ различныхъ элементовъ, способствовавшихъ возрожденію наукъ въ Европѣ, мы распространили его также на геометрію Римлянъ и геометрію среднихъ вѣковъ.

«Человѣческій умъ слѣдуетъ повидимому по пути необходимости: всякій успѣхъ его кажется опредѣленъ заранѣе настолько, что мы напрасно пытались бы писать исторію одного народа, или одной науки, начиная съ извѣстнаго времени, не бросивъ взгляда на времена и событія предшествовавшія [36])».

Эта справедливая мысль послужитъ намъ извиненіемъ въ томъ, что по необходимости, ею-же вызванной, это Примѣчаніе будетъ слишкомъ длинно.

Геометрія Индѣйцевъ.

Мы получили нашу систему счисленія отъ Арабовъ, съ которыми имѣли частыя сношенія, и потому сначала приписывали имъ честь этой геніальной и полезной идеи, оказавшей много услугъ наукамъ и преимущественно астрономіи. Но потомъ, изъ различныхъ документовъ, доставленныхъ самими Арабами, дознано, что честь эта принадлежитъ Индѣйцамъ. Это прекрасное и полезное изобрѣтеніе дало возможность выражать всевозможныя числа при помощи только девяти знаковъ съ измѣненіемъ по очень простому закону ихъ значенія, смотря по занимаемому мѣсту, и удивительно сократило всякія исчисленія, столь затруднявшія Римлянъ; оно было способно возбудить въ Европѣ, гдѣ оно было признано повсемѣстно, уваженіе къ своимъ изобрѣтателямъ и заставляло думать, что Индѣйскій народъ былъ способенъ и къ другимъ открытіямъ въ математическихъ наукахъ.

Дѣйствительно, вскорѣ найдены были нѣкоторыя указанія, свидѣтельствовавшія, что этотъ народъ разработывалъ также

---

[36]) *Histoire des sciences mathématiques en Italie,* par M. Libri; Discours préliminaire, t. I, p. 3.

высшую ариѳметику, отъ которой произошла наука перенесенная къ намъ Фибонакки (Fibonacci) отъ Арабовъ подъ названіемъ *Algebra et Almucabala* и составляющая теперь нашу алгебру.

Исторія науки была въ высшей степени заинтересована разъясненіемъ этихъ первыхъ указаній.

Лѣтъ двадцать тому назадъ они получили полное подтвержденіе.

Въ началѣ настоящаго столѣтія Тейлоръ, Стракей и Кольбрукъ [37]) ознакомили насъ съ математическими сочиненіями двухъ индѣйскихъ писателей Брамегупты и Баскары Ачаріи, считающихся самыми знаменитыми въ своемъ народѣ; первый изъ нихъ жилъ въ VI, а второй въ XII вѣкѣ нашего лѣтосчисленія. Въ этихъ сочиненіяхъ излагаются *ариѳметика, алгебра* и *геометрія*. Ариѳметика и алгебра занимаютъ болѣе значительную часть и вполнѣ подтверждаютъ мнѣніе въ пользу Индѣйцевъ, какъ изобрѣтателей этихъ двухъ отраслей исчисленія въ томъ видѣ, какъ мы получили ихъ отъ Арабовъ, и даже въ состояніи большаго развитія и совершенства.

Комментаріи различныхъ индѣйскихъ авторовъ, сопровождающіе текстъ этихъ двухъ сочиненій, приписываютъ ученому, еще болѣе древнему, чѣмъ Брамегупта и называвшемуся Аріабгатта (Aryabhatta), рѣшеніе въ цѣлыхъ числахъ уравненія первой степени съ двумя неизвѣстными по способу, похожему на способъ Мезиріака (Bachet de Méziriac), появившійся въ первый разъ въ Европѣ въ 1624 году. «Сочиненія Брамегупты и Баскары содержатъ въ себѣ изысканія гораздо высшаго порядка. Кромѣ общаго рѣшенія уравненій второй степени съ однимъ неизвѣстнымъ и нѣкоторыхъ

---

[37]) *Bija Ganita or the Algebra of the Hindus, by Edv. Strachey.* London; 1813, in—4. *Lilawati or a theatise on Arithmetic and Geometry by Bhascara Acharya, translated from the original sanscrit by J. Tailor.* Bombay; 1816, in—4. *Algebra, with Arithmetic and Mensuration, yrom the sanscrit of Brahmegupta and Bhascara; translated by H. T. Colebrooke.* London; 1817, in—4.

приводимыхъ уравненій высшихъ степеней, мы находимъ здѣсь способъ получать изъ одного рѣшенія всѣ остальныя цѣлыя рѣшенія неопредѣленнаго уравненія второй степени съ двумя неизвѣстными; этотъ анализъ, которымъ мы обязаны Эйлеру, былъ извѣстенъ Индѣйцамъ уже болѣе десяти столѣтій. Исчисленіе, имѣющее сходство съ нашими логариѳмами, особыя и весьма остроумныя обозначенія и въ особенности большая общность въ изложеніи задачъ свидѣтельствуютъ о степени развитія Индѣйскаго анализа. Эта наука, которую Индусы прилагали къ геометріи и астрономіи, была для нихъ могущественнымъ орудіемъ изслѣдованія, и мы должны съ похвалою указать на нѣкоторыя геометрическія задачи, для которыхъ ими найдены изящныя рѣшенія".

Ограничимся только этими краткими указаніями на аналитическія сочиненія Индусовъ, которыя мы заимствовали изъ *Histoire des sciences mathématiques* Либри. Но намъ нужно будетъ войти въ большія подробности, чтобы познакомиться съ ихъ геометріей, которая составляетъ нашъ главный предметъ.

Въ извлеченіяхъ и разборахъ этихъ сочиненій ограничивались обыкновенно тѣмъ, что указывали только нѣкоторыя предложенія, именно: квадратъ гипотенузы; пропорціональность сторонъ въ равноугольныхъ треугольникахъ; отрѣзки, образуемые перпендикуляромъ на основаніи треугольника; площадь треугольника въ функціи трехъ сторонъ; приблизительное отношеніе окружности къ діаметру; величина сторонъ первыхъ семи правильныхъ многоугольниковъ, вписанныхъ въ кругъ; отношеніе между хордою, синусомъ - версусомъ дуги и діаметромъ; наконецъ нѣкоторыя предложенія о вычисленіи разстояній посредствомъ тѣни гномона [38]).

[38]) См. *Correspondance polytechnique,* t. III. Janvier 1816; отрывокъ переведенный Теркемомъ изъ сочиненія *Tracts on Mathematical,* etc. by Hutton, III vol, in 8⁰, Лондонъ 1812. Гуттонъ получилъ эти новые и драгоцѣнные документы о алгебрѣ и геометріи Индѣйцевъ отъ Стракея, прежде нежели были публикованы изслѣдованія этого ученаго оріенталиста. *Edinburg Review,* 1817, n⁰ LVII. Delambre, *Histoire de l' Astronomie ancienne,* t. I. и *Histoire de l' Astronomie du moyen âge,* Discours préliminaire. *Journal des Savans,* Septembre. 1817.

Эти различныя предложенія и слѣдовательно весь геометрическій отдѣлъ сочиненій Брамегупты и Баскары вообще считали за *элементы геометріи*, или, по крайней мѣрѣ, за элементарныя и первоначальныя предложенія, служившія основою для всей науки Индусовъ. Поэтому думали, что ихъ геометрическія знанія стоятъ несравненно ниже ихъ познаній въ алгебрѣ [39]).

Но, изучая глубже геометрическій отдѣлъ индѣйскихъ сочиненій и стараясь дать себѣ отчетъ въ томъ, какое значеніе имѣютъ различныя предложенія, о которыхъ до сихъ поръ еще не упоминалось, и какую роль играютъ въ этихъ сочиненіяхъ разнообразныя истины, которыя кажутся на первый взглядъ лишенными всякой связи и набросанными случайно, мы пришли къ убѣжденію, что, вопервыхъ, предложенія, на которыя еще не было указано, имѣютъ именно самое большое значеніе; и, во вторыхъ, что сочиненіе Брамегупты, преимущественно, вовсе не представляетъ *элементовъ геометріи*, или собранія предложеній, наиболѣе употребительныхъ у Индусовъ, но относится цѣликомъ къ одной особой геометрической теоріи.

Оно относится именно къ теоріи четыреугольника, вписаннаго въ кругъ. Брамегупта рѣшаетъ здѣсь слѣдующій вопросъ, заслуживающій вниманія: *построить такой четыреугольникъ, способный вписываться въ кругъ, котораго площадь, діагонали, перпендикуляры и разныя другія линіи, а также діаметръ круга, выражались бы раціональными числами.*

Таковъ предметъ сочиненія Брамегупты, если только мы не ошибаемся въ истолкованіи большей части его предложеній, смыслъ которыхъ необходимо угадывать по причинѣ крайней сжатости изложенія, при чемъ, большею частію недостаетъ необходимыхъ условій для опредѣленности этихъ предложеній.

---

[39]) *They (the hindus) cultivadet Algebra much more, and with greater succes, than Geometry; as is evident from the comparatively low state of their knowledge in the one, and the high pitch of their attainments in the other.* Colebrooke *Brahmegupta and Bhascara Algebra*; Dissertation, p. XV

Многіе безъ сомнѣнія будутъ удивлены, узнавъ, что къ такаго рода вопросамъ приводится сочиненіе, на которое прежде, при недостаточно внимательномъ чтеніи, можно было смотрѣть, какъ на *элементы геометріи.* Вопросы эти обнаруживаютъ, если не весьма обширныя познанія, то по крайней мѣрѣ извѣстное искуство въ геометріи и навыкъ въ вычисленіяхъ. Въ послѣднемъ отношеніи вопросы эти соотвѣтствуютъ наклонности Индусовъ къ алгебрѣ. Они доказываютъ, что мы еще совершенно незнакомы съ элементами индѣйской геометріи, и заставляютъ желать, чтобы найдены были еще другіе подобные же отрывки времени Брамегупты, или еще болѣе древней эпохи, такъ какъ изъ нихъ видно, что геометрія въ то время уже разработывалась съ успѣхомъ.

Сочиненіе Баскары есть только весьма несовершенное подражаніе сочиненію Брамегупты; въ немъ послѣднее сочиненіе комментировано и искажено. Мы находимъ въ немъ только немногіе новые вопросы: нѣсколько предложеній о прямоугольномъ треугольникѣ (которыя были чужды вопросу, изслѣдованному Брамегуптой); замѣчательное приблизительное выраженіе площади круга въ функціи діаметра; величину сторонъ первыхъ семи вписанныхъ правильныхъ многоугольниковъ въ функціи радіуса и формулу для приблизительнаго вычисленія хорды въ функціи дуги и наоборотъ.

Но важнѣйшія предложенія Брамегупты, относящіяся къ его теоріи вписаннаго въ кругъ четыреугольника, тутъ опущены, или признаны *неточными.* Это показываетъ, что Баскара ихъ не понималъ.

Послѣднее обстоятельство, вмѣстѣ съ комментаріями различныхъ толкователей, доказываетъ, какъ намъ кажется, что послѣ Брамегупты науки въ Индіи клонились къ упадку и что сочиненіе этого геометра переставало быть понятнымъ. Извѣстно, что въ настоящее время индѣйскіе ученые отличаются глубокимъ невѣдѣніемъ въ математикѣ [40]).

---

[40]) Въ Пунѣ (Poona), главномъ учрежденіи Браминовъ, найдется не болѣе десяти или двѣнадцати человѣкъ, понимающихъ Lilavati или Bija-Ganita; и хотя въ Бомбеѣ есть много астрономовъ по должности, однако

Теперь мы предложимъ краткій обзоръ сочиненія Брамегупты. Послѣ этого разберемъ подобнымъ же образомъ сочиненіе Баскары и покажемъ значительныя различія, найденныя нами между этими двумя сочиненіями, написанными черезъ шесть столѣтій одно послѣ другаго.

О геометріи Брамегупты.

Сочиненія Брамегупты, которыми Европа обязана знаменитому Кольбруку, извлечены изъ трактата объ астрономіи, въ которомъ они составляютъ двѣнадцатую и восемнадцатую главы. Двѣнадцатая глава есть трактатъ ариѳметики (подъ названіемъ Ganita), восемнадцатая—трактатъ алгебры (подъ названіемъ Cuttaca). Геометрія составляетъ часть трактата ариѳметики и занимаетъ въ немъ отдѣлы IV, V,... IX подъ слѣдующими заглавіями въ англійскомъ текстѣ: *Plane figure*, *Excavations*, *Stacks*, *Saw*, *Mouns of Grain* и *Measure by Shadow*.

Отдѣленіе IV, подъ заглавіемъ: *плоскія фигуры*: *треугольникъ и четыреугольникъ*, состоитъ изъ двадцати трехъ предложеній, заключающихся въ §§ 21—43.

Изложеніе всѣхъ этихъ предложеній дано въ сокращенной формѣ, въ высшей степени сжато, и не сопровождается никакими доказательствами. Предложенія представлены въ общемъ видѣ, безъ помощи всякаго чертежа и безъ всякаго числоваго приложенія въ текстѣ. Но въ примѣчаніяхъ одного индѣйскаго автора, по имени Шатурведа, находятся относящіеся сюда чертежи и приложенія.

Нѣкоторыя изъ предложеній, но очень немногія, понятны и въ изложеніи ихъ находятся всѣ части, необходимыя для ихъ полнаго состава. Но другія изложены крайне недостаточно и въ нихъ нѣтъ никакого указанія на значительную часть необходимыхъ условій вопроса. Напримѣръ, если гово-

---

Тэйлоръ не нашелъ ни одного, кто понималъ бы хоть страницу изъ Lilavati. (Delambre, *Histoire de l'Astronomie*, t. I. p. 545).

рится о четыреугольникѣ, то въ предложеніи даются только выраженія длины четырехъ его сторонъ и совсѣмъ не указываются другія условія, необходимыя для построенія, также какъ не упоминаются и тѣ свойства фигуры, которыя въ намѣреніи автора должны были составлять предметъ предложенія. Всѣ эти предложенія Брамегупты нужно было, слѣдовательно, отгадывать.

По смыслу, который мы имъ придали, оказалось, что сочиненіе имѣетъ цѣлію рѣшеніе слѣдующихъ четырехъ вопросовъ, относящихся къ треугольнику и четыреугольнику.

1° Найти площадь треугольника и радіусъ описаннаго около него круга въ функціи трехъ его сторонъ.

2° Построить треугольникъ, котораго площадь и этотъ радіусъ выражались бы раціональными числами, предполагая, что стороны треугольника суть также числа раціональныя.

3° Для четыреугольника вписаннаго въ кругъ опредѣлить въ функціи сторонъ: площадь, діагонали, перпендикуляры, отрѣзки, образуемые при взаимномъ пересѣченіи этихъ линій и діаметръ круга.

4° Наконецъ, *построить четыреугольникъ вписанный въ кругъ, въ которомъ все это—площадь, діагонали, перпендикуляры, ихъ отрѣзки и діаметръ круга — выражалось бы раціональными числами.*

Къ этимъ четыремъ вопросамъ относятся восемнадцать первыхъ предложеній сочиненія Брамегупты, они совершенно достаточны для ихъ рѣшенія и ни одно изъ нихъ нельзя считать лишнимъ; можно поэтому сказать, что сочиненіе изложено умно и точно. Нѣкоторыя послѣдующія предложенія относятся къ другимъ предметамъ.

Можно даже сказать, что сочиненіе Брамегупты имѣетъ предметомъ одинъ только изъ вышеприведенныхъ вопросовъ, именно послѣдній, относящійся къ вписанному четыреугольнику. Три другіе являются тогда неизбѣжными подготовленіями къ его рѣшенію; и дѣйствительно, всѣ они имѣютъ приложеніе при полномъ рѣшеніи вопроса о четыреугольникѣ.

Прежде нежели перейдемъ къ разбору сочиненія Брамегупты, мы должны познакомить читателя съ нѣкоторыми выраженіями математической номенклатуры Индусовъ; эти выраженія ими употреблялись съ чрезвычайнымъ удобствомъ при изложеніи теоремъ въ сжатомъ видѣ и безъ помощи чертежей, что придавало изложенію характеръ общности, котораго часто недоставало въ геометріи Грековъ. Впослѣдствіи мы сами будемъ пользоваться этими выраженіями: они облегчатъ намъ изложеніе и позволятъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ сохранить стиль индѣйскихъ геометровъ.

Въ треугольникѣ одна сторона называется *основаніемъ*, двѣ другія *сторонами*, или *бедрами*; *перпендикуляръ* есть линія, проведенная подъ прямымъ угломъ къ основанію изъ точки пересѣченія сторонъ. *Отрѣзки* суть части заключающіяся между подошвою перпендикуляра и двумя концами основанія.

Въ прямоугольномъ треугольникѣ одна сторона прямаго угла называется *стороною*, другая *прямою* (*upright*); третья сторона треугольника называется *гипотенузой*. Слово *прямой*, которое въ нашей математической номенклатурѣ, прилагается только къ угламъ, мы замѣнимъ словомъ *катетъ*, которое употреблялось Греками и Римлянами. Многоугольникъ о четырехъ сторонахъ называется *тетрагономъ* (за исключеніемъ заглавія сочиненія: *треугольникъ* и *четыреугольникъ*); одна изъ четырехъ сторонъ есть *основаніе*; противоположная ей называется *вершиною* (*summit*) и двѣ остальныя—*боками*.

Мы не можемъ употреблять слово *вершина*, потому что оно въ нашемъ языкѣ никогда не прилагается къ линіи, но всегда къ точкѣ, и потому мы замѣнимъ его словомъ *верхъ* (*corauste*), въ подражаніе Римлянамъ, которые давали также особое имя сторонѣ противолежащей основанію четыреугольника и называли ее *coraustus*. Это слово встрѣчается въ нѣкоторыхъ древнихъ рукописяхъ и употреблено было въ 1486 году въ *Margarita Philosophica*.

Перпендикуляры четыреугольника — это перпендикуляры, опущенные на основаніе изъ двухъ верхнихъ концевъ боковъ, такъ что каждый изъ нихъ соотвѣтствуетъ своему боку. Каж-

дый изъ перпендикуляровъ образуетъ на основаніи два отрѣзка. Первый изъ отрѣзковъ, находящійся между перпендикуляромъ и соотвѣтствующимъ бокомъ, называется *отрѣзкомъ*, другой есть его *дополненіе*. Индѣйцы употребляли слово *діагональ* въ томъ же значеніи, какъ и мы.

Для прямоугольника существуютъ особыя названія. Прямоугольникъ называется *продолговатымъ* (*oblong*); двѣ прилежащія стороны называются, какъ и въ прямоугольномъ треугольникѣ, *стороною* и *прямою*; мы же будемъ говотить *сторона* и *катетъ*.

Слово *трапеція* (*trapezium*) употреблено нѣсколько разъ, но значеніе его не опредѣлено. Изъ замѣтки Кольбрука, помѣщенной въ началѣ геометрическаго отдѣла Баскары и заимствованной у толкователя Ганезы, видно, что это слово соотвѣствующее санскритскому названію *vishama - chaturbhuja*, относится къ четыреугольнику съ четырьмя неравными сторонами. Это же самое значеніе имѣло оно у Грековъ (см. 34-е опредѣленіе въ I книгѣ Евклида) и до сихъ поръ сохранило его у англійскихъ геометровъ. [11]) То же значеніе мы

---

[11]) Въ настоящее время во Франціи слово *трапеція* прилагается исключительно къ четыреугольнику, у котораго двѣ стороны параллельны, а другія двѣ не параллельны. Это новое значеніе оно получило около середины прошедшаго столѣтія; до тѣхъ же поръ употреблялось въ томъ же смыслѣ какъ у Евклида.

Впрочемъ и прежде въ различныя, и даже весьма отдаленныя, эпохи оно получало по временамъ это же особое значеніе; такъ въ 174 предложеніи 7-й книги Математическаго Собранія Паппа слово это относится необходимо къ четыреугольнику съ двумя параллельными и съ двумя другими какими нибудь сторонами; въ комментаріѣ Евтоція на 49-е предложеніе 1-й книги коническихъ сѣченій Аполлонія оно имѣетъ тоже значеніе. Въ новые вѣка мы находимъ это же значеніе, формально выраженное въ сочиненіи Peucer: *Elementa doctrinae de circulis coelestibus,* in—8°, 1569, гдѣ мы читаемъ: *Quae vero non* παραλληλόγραμμα *sunt, aut duas habent lineas aequaliter distantes ut* τραπέζια *mensulae; aut nullas prorsus parallelas lineas habent, ut* τραπεζοειδῆζ.

Римляне называли четыреугольникъ съ двумя параллельными сторонами *mensa,* или *mensula.* Стевинъ называлъ его *hache,* потому что эта фигура, по его словамъ, скорѣе похожа на топоръ, чѣмъ на столъ. (*Oeuvres mathématiques* de Stevin, p. 373).

даемъ ему и въ предложеніяхъ Брамегупты. Но чтобы эти предложенія имѣли смыслъ, необходимо допустить, что въ *трапеціи* діагонали пересѣкаются подъ прямымъ угломъ. Только въ двухъ предложеніяхъ такое ограниченіе не представляется необходимымъ; но и тутъ есть поводъ предполагать, что оно подразумѣвалось Брамегуптой. Это первое условіе при построеніи трапеціи не одно должно было соблюдаться индѣйскимъ авторомъ. Мы узнали кромѣ того, что трапеція эта должна *вписываться въ кругъ.* Ни одно изъ этихъ требованій не указано ни въ текстѣ Брамегупты, ни въ примѣчаніяхъ толкователя Шатурведы. Слово трапеція употреблено у Баскары только два раза и мы замѣтили, что авторъ оба раза прилагаетъ его къ четыреугольникамъ, построеннымъ особымъ образомъ и имѣющихъ діагонали подъ прямымъ угломъ.

Мы будемъ, за недостаткомъ другаго слова, употреблять слово трапеція въ сказанномъ смыслѣ съ тою цѣлію, чтобы сохранить краткость выраженія, которая поможетъ намъ высказать отличительный характеръ предложеній геометра Индуса.

Всѣ названія разныхъ видовъ четыреугольныка очень часто мѣнялись.

Прямоугольникъ называвшійся у Грековъ ἑτερομήκης, получилъ у Римлянъ названіе *tetragonus parte altera longior* (см. Боэція и Кассіодора). Въ средніе вѣка Кампанъ и Винцентъ де-Бове дали ему названіе *tetragone long*, которое онъ сохранилъ и во время возрожденія въ сочиненіяхъ Замберти, Тарталеа и др. Впослѣдствіи нѣкоторые авторы называли его *oblong* (см. Astedius *Encyclopaedia universa,* lib. XV). Наконецъ во Франціи онъ получилъ имя *rectangle* (Mersenne, *de la vérité des sciences*, p. 815), которое осталось до сихъ поръ. Въ Англіи онъ все еще называется *oblong.*

Винцентъ де-Бове, писатель XIII вѣка, авторъ энциклопедіи *Speculum mundi*, въ которой съ громадными свѣдѣніями собрано множество драгоцѣнныхъ для исторіи документовъ, называлъ *climia* — ромбъ Грековъ; *simile climia*—ромбоидъ, или параллелограммъ; и *climinaria*—всѣ неправильныя четыреугольники, т. е. трапеціи Грековъ.

Кампанъ, писатель того же времени, которому Европа обязана первымъ переводомъ Евклида, сдѣланнымъ имъ съ арабскаго текста, называлъ ромбъ—*helmuayn*; параллелограммъ — *similis helmuayn;* и трапецію Евклида — *helmuariphe.* Эти названія употреблялись въ эпоху возрожденія; ихъ можно найти въ практической геометріи Брадвардина и въ сочиненіяхъ Луки Бурго и Тарталеа.

Значеніе, данное нами слову трапеція, съ условіемъ, что эта фигура должна быть способна вписываться въ кругъ, уже придаетъ смыслъ многимъ предложеніямъ, но еще не всѣмъ; во многихъ другихъ, хотя и не относящихся къ трапеціи, необходимо также допустить, что рѣчь идетъ о четыреугольникѣ, вписываемомъ въ кругъ. Въ нихъ говорится о четыреугольникѣ съ двумя равными противоположными сторонами, или даже съ тремя равными сторонами.

Этихъ первыхъ предположеній достаточно, чтобы выполнить построеніе фигуръ, къ которымъ относятся предположенія Брамегупты; но этого еще недостаточно; нужно еще пополнить то, о чемъ авторъ умалчиваетъ, и открыть тѣ свойства, которыми должны были обладать построенныя такимъ образомъ фигуры, свойства, которыя и составляли настоящій предметъ сочиненія. Тотъ же вопросъ представляется и относительно предложеній о треугольникѣ, въ которыхъ условія построенія означены вполнѣ, но также ничего не говорится о свойствахъ, которыя должна имѣть эта фигура.

Представимъ теперь сводъ предложеній, найденныхъ нами въ сочиненіи Брамегупты. Тѣмъ изъ нихъ, изложеніе которыхъ неполно и непонятно, дадимъ тотъ смыслъ и толкованіе, о которыхъ мы только что говорили. Мы распредѣлимъ всѣ предположенія по группамъ, несоблюдая того порядка, въ которомъ они расположены въ индѣйскомъ сочиненіи; этотъ порядокъ можно возстановить при помощи указанныхъ нами нумеровъ параграфовъ.

1° Четыре предложенія о треугольникѣ:

Первое: квадратъ гипотенузы въ прямоугольномъ треугольникѣ; § 24.

Второе: способъ вычисленія перпендикуляра въ функціи сторонъ; § 22.

Третье: площадь треугольника въ функціи трехъ сторонъ § 21.

Четвертое: выраженіе діаметра круга, описаннаго около треугольника; § 27.

Изъ этихъ предложеній два первыя, по крайней мѣрѣ, слѣдуетъ разсматривать, какъ леммы, полезныя впослѣдствіи.

2° Три предложенія о построеніи треугольника, въ которомъ стороны и перпендикуляръ, а слѣдовательно также площадь и діаметръ описаннаго круга, суть числа раціональныя:

Первое: прямоугольный треугольникъ; § 35.

Второе: равнобедренный треугольникъ; § 33.

Третье: косоугольный треугольникъ; § 34.

3° Девять предложеній о тетрагонѣ, вписываемомъ въ кругъ:

Первое: площадь четыреугольника въ функціи четырехъ сторонъ; § 21.

Второе: выраженіе его діагоналей; § 28.

Третье: способъ вычислять діаметръ описаннаго круга въ функціи сторонъ; особое выраженіе этого діаметра для *трапеціи* (тетрагона съ діагоналями подъ прямымъ угломъ); § 26.

Четвертое: особое выраженіе діагонали и перпендикуляра для вписаннаго тетрагона, имѣющаго равные бока; § 23.

Пятое: способъ вычислять отрѣзки, образуемые другъ на другѣ діагоналями и перпендикулярами вписаннаго тетрагона съ равными боками; § 25.

Шестое: способъ вычислять перпендикуляры и отрѣзки, образуемые ими на основаніи, для вписанной трапеціи; § 29.

Седьмое: способъ вычислять для того же четыреугольника отрѣзки на діагоналяхъ, образуемые ихъ точкою пересѣченія; §§ 30 и 31.

Восьмое: способъ вычислять перпендикуляръ, проведенный изъ точки пересѣченія діагоналей на сторону, и продолженіе его до другой стороны; §§ 30 и 31.

Девятое: способъ вычислять отрѣзки, образуемые перпендикулярами на діагоналяхъ и сторонахъ и противоположными сторонами одна на другой; § 32.

4° Четыре предложенія о построеніи четыреугольника, вписываемаго въ кругъ, котораго стороны, діагонали, перпендикуляры, отрѣзки, образуемые этими линіями другъ на

другѣ, площадь и радіусъ описаннаго круга, были бы числами раціональными:

Первое: построеніе прямоугольника; § 35.

Второе: построеніе четыреугольника, въ которомъ двѣ противоположныя стороны равны; § 36.

Третье: построеніе четыреугольника, имѣющаго три равныя стороны; § 37.

Четвертое: построеніе четыреугольника съ четырьмя неравными сторонами; § 38. Построенный четыреугольникъ есть трапеція, т.-е. діагонали его наклонены подъ прямымъ угломъ.

Таковы, согласно съ принятымъ нами толкованіемъ, предложенія, заключающіяся въ восемнадцати параграфахъ сочиненія Брамегупты и относящіяся, какъ намъ казалось, къ теоріи четыреугольника вписываемаго въ кругъ и разрѣшающія вопросъ о построеніи такого четыреугольника, въ которомъ всѣ части были бы раціональны.

Слово *кругъ* встрѣчается только въ двухъ предложеніяхъ, въ § 26 и 27, гдѣ требуется найти радіусъ круга описаннаго около треугольника и четыреугольника; слово же *раціональный* не произнесено нигдѣ. Четыреугольникъ опредѣляется выраженіемъ длины его сторонъ и при этомъ ничего не говорится ни о другихъ условіяхъ построенія, которыя по нашему предположенію состоятъ въ требованіи вписыванія въ кругъ, ни о свойствахъ, которыми долженъ отличаться построенный четыреугольникъ и которыя должны состоять въ томъ, что всѣ части его должны выражаться числами раціональными.

5° Пять предложеній, слѣдующихъ послѣ этихъ восемнадцати параграфовъ, не относятся къ теоріи вписаннаго четыреугольника.

Первое относится къ прямоугольному треугольнику. При совершенно иномъ изложеніи предложеніе это приводится къ слѣдующему: *Найти на продолженіи обѣихъ сторонъ прямаго угла въ прямоугольномъ треугольникѣ точку, сумма*

разстояній которой отъ двухъ концовъ гипотенузы равнялась бы суммѣ сторонъ прямаго угла; § 39.

Четыре слѣдующія предложенія относятся къ кругу:

Первое: Выраженіе окружности и площади круга въ функціи діаметра. Пусть будетъ D діаметръ и R—радіусъ.

«Въ практикѣ берутъ окружность$=3D$, площадь $=3R^2$.

«Чтобы имѣть настоящія величины (*the neat values*) надобно взять окружность $=\sqrt{10D^2}$ и площадь $=\sqrt{10R^4}$»; § 40.

Второе: «Въ кругѣ 1^0 полухорда равна квадратному корню изъ произведенія отрѣзковъ перпендикулярнаго діаметра; 2^0 квадратъ хорды, дѣленный научетверенный любой отрѣзокъ, сложенный съ этимъ же отрѣзкомъ, равняется діаметру.» § 41.

Меньшій изъ отрѣзковъ Брамегупта называетъ *стрѣлкой* (*flèche, arrow*).

Когда два круга пересѣкаются, то они имѣютъ общую хорду; прямая, состоящая изъ двухъ стрѣлокъ, соотвѣтствующихъ въ двухъ кругахъ этой хордѣ, называется *вырѣзкомъ* (*l'érosion*).

Третье: «Стрѣлка равна полуразности діаметра и квадратнаго корня изъ разности квадратовъ діаметра и хорды.

Вычитая вырѣзокъ изъ двухъ діаметровъ, умножая остатки на вырѣзокъ и дѣля на сумму этихъ остатковъ, получимъ двѣ стрѣлки.» § 42.

Четвертое: Это предложеніе то же что вторая часть § 41.

Всѣ эти двадцать три предложенія составляютъ отдѣлъ IV.

Отдѣлъ V носитъ названіе *Excavations.* Здѣсь дается измѣреніе призмы и пирамиды и способъ для приблизительнаго измѣренія на практикѣ неправильныхъ тѣлъ.

Въ отдѣлахъ VI, VII и VIII, подъ заглавіями *Stacks*, *Saw* и *Mounds of grain*, авторъ даетъ правила для приблизительнаго измѣренія *груды кирпичей, кусковъ дерева* и *кучи зеренъ.*

Отдѣлъ IX носитъ заглавіе: *Измѣреніе посредствомъ гномона.*

Авторъ разсматриваетъ свѣчку, помѣщенную на вертикальной подставкѣ, и гномонъ, располагаемый также вертикально, и рѣшаетъ два слѣдующіе вопроса:

1° *Зная высоту свѣчки, высоту гномона и разстояніе между ихъ основаніями, найти длину тѣни, бросаемой гномономъ;* § 53.

2° *Найти высоту свѣчки, зная тѣни, бросаемыя гномономъ въ двухъ различныхъ положеніяхъ*; § 54.

Вотъ всѣ предложенія, составляющія геометрическую часть сочиненія Брамегупты.

Прежде нежели перейдемъ къ разбору сочиненія Баскары, сдѣлаемъ по нѣскольку замѣчаній на многія изъ этихъ предложеній.

Правило для построенія прямоугольнаго треугольника въ раціональныхъ числахъ алгебраически выразится такъ:

Пусть a будетъ сторона треугольника и b какое-нибудь количество; другая сторона будетъ:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}-b\right), \text{ а гипотенуза } \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}+b\right).$$

Это правило основывается на тождествѣ:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{b}+b\right)^2=\frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{b}-b\right)^2+a^2.$$

Въ изложеніи Брамегупты не произнесено слово *раціональный,* но мы встрѣчаемъ его въ этомъ же самомъ правилѣ въ § 38 его алгебры, гдѣ правило названо такъ: *Правило для построенія прямоугольнаго треугольника въ числахъ раціональныхъ.* .

Баскара въ геометрическомъ отдѣлѣ Лилавати, § 140, даетъ тоже самое предложеніе и прибавляетъ, что стороны будутъ *раціональны.*

Это правило, какъ мы видимъ, есть обобщеніе двухъ правилъ построенія прямоугольнаго треугольника въ цѣлыхъ чи-

слахъ по данной сторонѣ, выраженной четнымъ или нечетнымъ числомъ, правилъ, которыя Проклъ, *въ комментаріи къ сорокъ седьмому предложенію первой книги Евклида*, приписываетъ Пиѳагору и Платону.

Эти два правила греческихъ геометровъ выражаются формулами:

$$\left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2+a^2,$$

$$\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2+1\right]^2=\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2-1\right]^2+a^2 \quad [42]),$$

которыя получаются изъ формулы Брамегупты при $b=1$ и $b=2$.

Формулѣ Брамегупты можно дать такой видъ:

$$(a^2+b^2)^2=(a^2-b^2)^2+4a^2b^2.$$

Въ этомъ видѣ формула очень часто употреблялась новыми геометрами и служила основаніемъ ихъ способовъ для рѣшенія неопредѣленныхъ уравненій второй степени. Брамегупта пользовался ею для построенія равнобедреннаго треугольника, въ которомъ стороны и перпендикуляръ должны быть числами раціональными. Вотъ правило:

Пусть a и b будутъ два какія-нибудь числа; тогда (a^2+b^2) будетъ выраженіе двухъ равныхъ сторонъ треугольника, $2(a^2-b^2)$ будетъ основаніе и $2ab$—перпендикуляръ; § 33.

Изъ алгебраическаго правила Брамегупты въ § 34 видно, что для составленія косоугольнаго треугольника, котораго стороны и перпендикуляръ выражаются раціональными числами, онъ строитъ въ раціональныхъ числахъ два прямоугольные треугольника, имѣющіе общую сторону. Общая сторона

---

[42]) Боэцій, пользуясь также этими двумя формулами во 2-й книгѣ своей Геометріи, приписываетъ вторую изъ нихъ Архитасу.

служитъ перпендикуляромъ косоугольному треугольнику, составленному изъ другихъ сторонъ.

Многіе новые геометры рѣшали этотъ вопросъ такимъ же образомъ (см. комментаріи Баше-де-Мезиріака къ VI книгѣ *Questiones arithmeticae* Діофанта и *Sectiones triginta miscellaneae* Шутена, стр. 429).

Мы замѣтили, что два предложенія о равнобедренномъ и косоугольномъ треугольникѣ прилагаются къ построенію вписаннаго въ кругъ тетрагона съ двумя и тремя равными сторонами, которое дано Брамегуптой въ §§ 36 и 37.

Формула

$$(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2,$$

служившая у Брамегупты для построенія въ раціональныхъ числахъ прямоугольнаго треугольника по данной сторонѣ, можетъ служить также и въ томъ случаѣ, когда дана гипотенуза; въ самомъ дѣлѣ пусть гипотенуза будетъ c; сдѣлаемъ въ формулѣ $b = 1$ и помножимъ обѣ части на $\frac{c^2}{(a^2+1)^2}$, получимъ

$$c^2 = \frac{4a^2c^2}{(a^2+1)^2} + \frac{c^2(a^2-1)^2}{(a^2+1)^2};$$

откуда видно, что двѣ стороны треугольника будутъ представляться формами

$$\frac{2ac}{a^2+1} \text{ и } \frac{c(a^2-1)}{a^2+1},$$

гдѣ a — число произвольное.

Эту формулу далъ Баскара. Ея нѣтъ въ сочиненіи Брамегупты, потому что она безполезна при рѣшеніи вопроса о вписанномъ четыреугольникѣ, къ которому относятся всѣ предложенія его.

Только въ §§ 26 и 27 Брамегупта упоминаетъ о кругѣ, описанномъ около фигуры. Подобное условіе не означено ни

въ одномъ изъ остальныхъ предложеній, относящихся по нашему мнѣнію къ четыреугольнику, вписанному въ кругъ.

Въ § 27, гдѣ дается способъ вычислять діаметръ круга, описаннаго около треугольника, выражено извѣстное предложеніе: «произведеніе двухъ сторонъ треугольника, дѣленное на перпендикуляръ, опущенный на третью сторону, равно діаметру описаннаго круга.»

Способъ вычислять діаметръ круга, описаннаго около тетрагона, тотъ же самый; для этого разсматривается треугольникъ, составленный изъ двухъ прилежащихъ сторонъ и діагонали. Выраженіе діагоналей дано въ § 28.

Въ тетрагонѣ съ прямоугольными діагоналями *діаметръ равенъ квадратному корню изъ суммы квадратовъ двухъ противоположныхъ сторонъ.*

Предложеніе это основывается на извѣстномъ свойствѣ хордъ, пересѣкающихся въ кругѣ подъ прямымъ угломъ: *сумма квадратовъ четырехъ отрѣзковъ, образуемыхъ на двухъ хордахъ точкою ихъ пересѣченія, равна квадрату діаметра круга.* Это есть XI предложеніе въ книгѣ Архимеда, называющейся «*Леммы*».

§ 21, въ которомъ даются площади треугольника и четыреугольника въ функціи сторонъ, заслуживаетъ по нашему мнѣнію особеннаго вниманія, преимущественно со стороны тѣхъ лицъ, которыя интересуются открытіемъ историческихъ документовъ, представляющихъ собою лѣтописи науки.

Этотъ параграфъ состоитъ изъ двухъ частей, изъ которыхъ первая, какъ намъ кажется, допускаетъ два различныя истолкованія. Если ее перевести буквально, то она представляетъ въ нѣкоторомъ родѣ отрицательное предложеніе; въ ней говорится, что нѣкоторое правило для вычисленія площадей треугольника и тетрагона, не вѣрно. Но, сдѣлавъ небольшое измѣненіе въ текстѣ, мы получаемъ точное правило для вычисленія *трапеціи,* играющей въ сочиненіи Брамегупты главную роль.

Вотъ первое толкованіе:

1° Произведеніе полусуммъ противоположныхъ сторонъ даетъ не точную площадь треугольника и тетрагона.

2° Полусумма сторонъ написана четыре раза; изъ нея послѣдовательно вычитаемъ стороны; составляемъ произведеніе остатковъ; квадратный корень изъ этого произведенія есть точная площадь фигуры [43]).

Хотя здѣсь вовсе не упоминается о условіи, что тетрагонъ долженъ вписываться въ кругъ, но нельзя сомнѣваться, что во второй части предложенія говорится именно о такой фигурѣ; и дѣйствительно, это есть ни что иное какъ изящное правило, служащее для вычисленія площади вписаннаго тетрагона въ функціи четырехъ сторонъ. Въ этомъ правилѣ заключается также и правило для треугольника. Достаточно предположить, что одна изъ сторонъ тетрагона обращается въ нуль. Также понималъ это и Шатурведа, который въ очень короткой замѣткѣ говоритъ, что въ случаѣ треугольника изъ трехъ написанныхъ полусуммъ надобно вычесть соотвѣтсвенно три стороны, а четвертую полусумму оставить такъ, какъ она есть.

Эта формула площади треугольника въ функціи сторонъ была замѣчена геометрами, писавшими о сочиненіи Брамегупты, и считалась въ немъ предложеніемъ самымъ замѣчательнымъ; но никто еще, сколько мнѣ извѣстно, не упоминалъ о формулѣ площади четыреугольника. Между тѣмъ эта формула во всѣхъ отношеніяхъ важнѣе предыдущей: она не только общѣе ея, труднѣе доказывается, предполагаетъ болѣе познаній въ геометріи и, однимъ словомъ, не только имѣетъ болѣе научнаго значенія, но даже, какъ кажется, вполнѣ принадлежитъ автору Индусу; ея нѣтъ ни въ одномъ изъ гре-

---

[43]) Вотъ текстъ Кольбрука, который необходимо имѣть передъ глазами, чтобъ судить о двухъ толкованіяхъ, которыя этотъ текстъ, по нашему мнѣнію, допускаетъ: *The product of half the sides and countersides is the gross area of a triangle and tetragone. Half the sum of the sides set down four times, and severaly lessened by the sides, being multiplied together, the square — root of the product is the exact area.*

ческихъ сочиненій, чего нельзя сказать о формулѣ треугольника, какъ мы увидимъ это ниже.

Перейдемъ къ первой части занимающаго насъ предложенія, въ которой признается несправедливымъ, дѣйствительно невѣрное, правило для вычисленія площади треугольника и какого нибудь тетрагона въ функціи сторонъ.

Шатурведа, въ примѣчаніи, дѣлаетъ восемь числовыхъ приложеній этого правила, именно: къ тремъ треугольникамъ,— равностороннему, равнобедренному и косоугольному; потомъ къ квадрату, прямоугольнику, къ тетрагону съ двумя параллельными основаніями и двумя равными боками, къ тетрагону съ двумя параллельными основаніями и тремя равными сторонами и наконецъ къ трапеціи.

Дла треугольника онъ составляетъ полусумму двухъ сторонъ и помножаетъ ее на половину основанія. Онъ находитъ, что площадь всегда получается не точно. Это такъ и должно быть, потому что полусумма двухъ сторонъ никогда не можетъ быть равна перпендикуляру.

Для тетрагона онъ помножаетъ полусумму двухъ боковъ на полусумму двухъ основаній и говоритъ, что произведеніе есть точная площадь въ случаѣ квадрата и прямоугольника, но неточная въ трехъ другихъ случаяхъ.

Этотъ способъ вычисленія площади тетрагона употреблялся и считался точнымъ у римскихъ землемѣровъ. Мы находимъ его въ сборникѣ подъ заглавіемъ: *Rei agrariae auctores legesque variae* [44]), и даже въ геометріи Боэція (книга II; *De rhomboide rubrica*).

Правило для треугольника, по крайней мѣрѣ равнобедреннаго, встрѣчается также у *Gromatici Romani*. И то и другое правило употреблялись также, какъ вѣрныя, у насъ въ средніе вѣка. Мы находимъ ихъ въ сочиненіяхъ Беда между его ариѳметическими вопросами *ad acuendos juvenes* [45]), ко-

---

[44]) *Cura Wilelmi Goesii. Amst.* 1674, *in*—4°; см. стр. 313.

[45]) *Venerabilis Bedae opera;* 4 тома in fol. Cologne, 1612; t. I, столбцы 104 и 109. *De campo quadrangulo;* четыреугольникъ имѣетъ основаніе, равное 34, противоположная сторона равна 32 и два бока равны 30 и 32; площадь его будетъ

торыя разсматривались какъ зачатокъ извѣстной книги *Récréations mathématiques* [46]), и которыя аббатъ St. Emeran приписывалъ знаменитому Алкуину, учителю и другу Карла Великаго.

Не проникли ли эти два правила, свидѣтельствующія, что и для насъ существовало время невѣжества, въ Индію, гдѣ геометры, дѣйствительно достойные этого имени, признали ихъ ложными? и не назначалось ли предложеніе Брамегупты для того, чтобы замѣнить этотъ невѣжественный практическій пріемъ правиломъ вполнѣ точнымъ и геометрическимъ?

По крайнѣй мѣрѣ совершенное тождество этихъ правилъ у западныхъ народовъ съ тѣми, которыя признаны ложными авторомъ Индусомъ, подтверждаетъ, кажется, ихъ общее происхожденіе. Потому что заблужденіе не то, что истина. Истина въ геометріи есть законъ общій, она единственна, она принадлежитъ всѣмъ временамъ, всѣмъ умамъ, способнымъ ее понять; и присутствіе ея во многихъ мѣстахъ, у многихъ народовъ, не есть доказательство сообщеній между ними. Другое дѣло —заблужденіе; его формы не имѣютъ законовъ; онѣ различны, неисчислимы; и совпаденіе въ этомъ случаѣ указываетъ на общее происхожденіе.

Это обстоятельство представляетъ, можетъ быть, нѣкоторый интересъ, какъ историческій фактъ, свидѣтельствующій о научныхъ сообщеніяхъ въ отдаленныя отъ насъ времена и

$$\left(\frac{34+32}{2}\right)\times\left(\frac{30+32}{2}\right)=31\times 33=1023.$$

De campo triangulo; треугольникъ имѣетъ бедра равныя 30 и основаніе равное 18; площадь его будетъ

$$\frac{30+30}{2}\times\frac{18}{2}=30\times 9 \quad 270.$$

Эти ложныя правила прилагаются еще разъ въ вопросахъ подъ заглавіемъ *De civitate quadrangula; De civitate triangula.*

[46]) Montucla; *Histoire des mathématiques*, t. I, p. 496

притомъ доказывающій великое превосходство Индусовъ того времени передъ ихъ современниками на западѣ.

Вотъ теперь второе истолкованіе предложенія.

Въ нашемъ второмъ способѣ изъясненія предложенія мы измѣняемъ нѣкоторыя слова текста и переводимъ ихъ слѣдующимъ образомъ:

1° *Въ трапеціи площадь равна полусуммѣ произведеній противоположныхъ сторонъ.*

2° *Для треугольника и тетрагона пишемъ полусумму сторонъ четыре раза, вычитаемъ послѣдовательно стороны; составляемъ произведеніе остатковъ; квадратный корень изъ этого произведенія будетъ площадь фигуры* [47]).

Здѣсь опять, конечно, рѣчь идетъ о трапеціи и о тетрагонѣ вписываемомъ въ кругъ.

Чтобы получить это изложеніе, достаточно уничтожить слово *неточная* (*gross*), замѣнить слово *тетрагонъ* словомъ *трапеція* и перенести слово треугольникъ во вторую фразу, прибавляя тамъ еще слово *тетрагонъ*. Вторая фраза сохраняетъ прежнее значеніе, первая же получаетъ ясный смыслъ и становится довольно красивымъ предложеніемъ, которое, можетъ быть, не было еще замѣчено. Доказательство его легко, потому что діагонали наклонены подъ прямымъ угломъ и потому очевидно, что площадь трапеціи равна половинѣ произведенія ихъ одной на другую. Но произведеніе это, на основаніи теоремы Птоломея о вписанномъ четыреугольникѣ, теоремы, которою Брамегупта очевидно пользовался въ предложеніи § 28 [48]), равно суммѣ произведеній противополож-

---

[47]) Вотъ каково могло бы быть изложеніе, соотвѣтствующее этому толкованію; читатели увидятъ, какія легкія измѣненія достаточно сдѣлать въ англійскомъ текстѣ, чтобы его получить: *Half the sum of the products of the sides and countersides is the area of a trapezium. In a triangle and tetragone half the sum of the sides set down four times, and severally lessened by the sides, being multiplied together the square—root of the product is the area.*

[48]) Мы не хотимъ сказать этимъ, что Брамегупта заимствовалъ эту теорему изъ Альмагеста Птоломея; но только, что онъ зналъ ее и пользовался ею для полученія выраженія діагоналей вписаннаго четыреугольника, которое дано имъ въ § 28.

ныхъ сторонъ. Слѣдовательно половина этой суммы есть площадь трапеціи.

До сихъ поръ изъ § 21 была замѣчена только та часть, которая относится къ площади треугольника въ функціи трехъ сторонъ, но не было обращено вниманія ни на формулу площади четыреугольника, вписаннаго въ кругъ, которая во всѣхъ отношеніяхъ заслуживаетъ предпочтеніе передъ предыдущей, ни на предложеніе, въ которомъ объявляются *неточными* правила, одинаковыя съ употреблявшимися у Римлянъ и у западныхъ народовъ въ средніе вѣка.

Формула площади треугольника въ сочиненіи Брамегупты обратила на себя тѣмъ болѣе вниманія, что вообще не полагали, чтобы она была извѣстна въ древности, въ особенности у Грековъ. Монтукла, который сначала приписывалъ ее Тарталеа, возвелъ въ послѣдствіи ея происхожденіе не далѣе Герона младшаго, писателя VII-го столѣтія. Точно также Деламбръ въ предисловіи къ *Histoire de l'astronomie au moyen âge*, говоря о сочиненіи Брамегупты, нашелъ возможнымъ сдѣлать, въ интересѣ Грековъ, только одно возраженіе противъ этой формулы индѣйскаго геометра; именно, что *эта весьма любопытная теорема только въ незначительной степени полезна для астрономіи.* Но мы должны замѣтить здѣсь, что теорема эта была извѣстна въ Александрійской школѣ, хотя это и не было замѣчено. Она доказана въ сочиненіи по геодезіи Герона старшаго (за два вѣка до христіанскаго лѣтосчисленія) подъ заглавіемъ *Діоптръ*, или *Уровень*; сочиненіе это лѣтъ двадцать тому назадъ переведено въ исторіи оптики [49]) Вентури изъ Болоньи подъ заглавіемъ *il Traguardo.* Эту же теорему, безъ доказательства, Вентури нашелъ еще въ одномъ отрывкѣ по геометріи латинскаго автора, который, по его мнѣнію, существовалъ раньше Боэція. Мы видѣли ее также въ рукописи XI столѣтія,

---

[49]) *Commentari sopra la storia e le teorie dell'ottica.* Bologna, 1814, in—4° p. 77—147.

принадлежащей библіотекѣ города Шартра. Тамъ она входитъ въ трактатъ о измѣреніи фигуръ, который, какъ мы думаемъ, есть тотъ самый, о которомъ упоминаетъ Вентури; по нашему мнѣнію его можно бы приписать Фронтину. Такимъ образомъ первенство въ открытіи формулы площади треугольника не можетъ принадлежать Брамегуптѣ. Но этотъ геометръ можетъ уступить его, нисколько не теряя уваженія, заслуженнаго, благодаря этому обстоятельству, его сочиненіемъ; потому что у него мы находимъ гораздо болѣе важную формулу площади вписаннаго четыреугольника въ функціи сторонъ, которая принадлежитъ ему неоспоримо, такъ какъ она не была найдена ни въ одномъ изъ болѣе древнихъ сочиненій.

До сихъ поръ думали, что она принадлежитъ новымъ геометрамъ. Снеллій, въ комментаріѣ на первое предложеніе книги *De problematibus miscellaneis* Лудольфа Фонъ-Цейлена,[50]) приводитъ ее, какъ свою собственную. Но мы имѣемъ причины думать, что она была найдена нѣсколькими годами ранѣе [51]). Геометрическое доказательство ея не лишено трудности, даже по мнѣнію самого Эйлера, который предложилъ свое доказательство въ Петербургскихъ мемуарахъ [52]), находя слишкомъ запутанными два доказательства, данныя Филиппомъ Ноде прежде этого въ Берлинскихъ мемуарахъ [53])

---

[50]) Сказавъ, что прежде вычисляютъ площади двухъ треугольниковъ, изъ которыхъ состоитъ четыреугольникъ, Снеллій прибавляетъ: *Quanto operosior est haec vulgata ad investigandam aream via, tanto gratius novum hoc nostrum theoremation benevolo lectori futurum speramus.*

[51]) Преторій, въ сочиненіи о четыреугольникѣ вписанномъ въ кругъ, которое относится къ 1598 году и о которомъ мы скажемъ ниже, говоритъ, что еще прежде искали уже діаметръ круга, описаннаго около четыреугольника въ функціи сторонъ и *площадь* четыреугольника.

[52]) *Novi commentarii*, t. I, 1747 и 1748. *Variae demonstrationes geometriae* „Аналитическое доказательство этой формулы не трудно; но тѣ, которые искали геометрическаго доказательства ея, встрѣтили весьма большія затрудненія."

Въ Петербургскихъ *Nova acta*, t. X, 1792, находится другое доказательство Фусса.

[53]) *Miscellanea Berolinensia* t. III, 1723.

Предложеніе это встрѣчается въ немногихъ сочиненіяхъ, хотя въ XVI вѣкѣ и позднѣе занимались нерѣдко вписаннымъ четыреугольникомъ, какъ мы это увидимъ ниже.

Что касается до формулы площади треугольника, то мы встрѣчаемъ ее вездѣ, у всѣхъ народовъ и во всѣ времена. Она была извѣстна Арабамъ и отъ нихъ то перешло первое доказательство ея, извѣстное въ Европѣ. Ее находимъ мы въ сочиненіи по геометріи трехъ сыновей Муза Бенъ-Шакера, переведенномъ съ арабскаго на латинскій подъ заглавіемъ: *Verba filiorum Moysi filii Schaker, Mahumeti, Hameti, Hasen* [54]). Здѣсь она доказана геометрическимъ способомъ и иначе, чѣмъ у Герона Александрійскаго; это заставляетъ насъ предполагать, что Арабы получили ее отъ Индѣйцевъ; тѣмъ болѣе, что три сына Муза-Бенъ-Шакера въ своемъ сочиненіи говорятъ, что эта формула употреблялась безъ доказательства многими писателями; кромѣ того извѣстно, что эти три знаменитые геометра заимствовали часть своихъ математическихъ знаній изъ индѣйскихъ сочиненій. [55]) Либри замѣтилъ туже формулу въ геометрическомъ трактатѣ Еврея Савосарды, написанномъ около XII вѣка. [56]) Далѣе она встрѣчается въ *Практической Геометріи* Леонарда изъ Пизы и доказана здѣсь по способу трехъ братьевъ Арабовъ. Кажется, что ее же нашли, съ такимъ же доказательствомъ, въ сочиненіи Іордана Неморарія, жившаго нѣсколько лѣтъ позднѣе Леонарда. Въ эпоху возрожденія эта формула является почти во всѣхъ сочине-

---

[54]) Сочиненіе это существуетъ только въ рукописи. Въ парижской королевской библіотекѣ есть одинъ экземпляръ его, присоединенный къ большему числу другихъ интересныхъ ученыхъ сочиненій переведенныхъ съ арабскаго и собранныхъ подъ заглавіемъ *Mathematica*. (Supplément latin, n⁰ 49, in—fol. См. *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, de M. Libri, t. I, p. 266). Въ Базельской академіи есть еще рукопись подъ заглавіемъ: *Liber trium fratrum de Geometria.*

[55]) *Casiri, Bibliotheca Arabico-Hispana Escurialensis*, etc. *„Mohammed ben Musa Indorum in praeclarissimis inventis ingenium et acumen ostendit“*. (T. I, p. 427). Въ оглавленіи сочиненія читаемъ еще: *Librum artis logisticae a Khata Indo editum exornavit. (Mohammed ben Musa).*

[56]) *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, p. 160.

ніяхъ по геометріи. Рейшъ далъ ее въ 1486 году въ *Margarita philosophica* Есть много причинъ думать, что онъ заимствовалъ ее у латинскаго писателя, о которомъ мы говорили выше. Потомъ находимъ ее, съ доказательствомъ Леонарда, въ сочиненіи Луки Бурго: *Summa Arithmetica, Geometria, etc.* (*Distinctio prima, capitulum octavum.* f. 12) и въ третьей части сочиненія Тарталеа: *De numeris et mensuris.* Карданъ напечаталъ ее безъ доказательства въ: *Practica arithmetica* [57]), и Оронцій Фине въ своей геометріи, кн. II, гл. 4. Рамусъ, въ *Scholae mathematicae* приводитъ доказательство Іордана и Тарталеа, критикуя ихъ способъ изложенія формулы и упрекая ихъ за выраженіе, что площадь треугольника есть квадратный корень изъ произведенія четырехъ линій, — выраженіе, неупотребительное въ геометріи Грековъ, потому что геометрическое значеніе имѣетъ произведеніе двухъ и трехъ, но не четырехъ, линій. Снеллій въ примѣчаніяхъ къ сочиненіямъ Лудольфа Фанъ-Цейлена [58]), воспроизводя эту критику Рамуса, излагаетъ правило согласно съ способомъ выраженія Грековъ и говоритъ, что площадь треугольника равна площади прямоугольника, одна сторона котораго есть средняя пропорціональная между двумя изъ четырехъ множителей, входящихъ въ алгебраическое выраженіе, а другая — средняя пропорціональная между двумя другими множителями. Дешаль (Milliet Dechales) слѣдовалъ также строго геометрическому стилю Грековъ [59]).

Формула, о которой мы говоримъ, встрѣчается во множествѣ другихъ сочиненій, которыя было бы безполезно приводить здѣсь. Почти во всѣхъ употребляется доказательство Луки Бурго, которое есть ничто иное, какъ доказательство Арабовъ, перенесенное къ намъ Фибонаки. Впрочемъ въ нѣкоторыхъ доказазательства иныя; какъ напримѣръ у

---

[57]) Cap. 63. *De mensuris superficierum;* art. IV.

[58]) *De figurarum transmutatione et sectione*; *Problema* 35, p. 73.

[59]) *Cursus mathematicus.* 1690, in-fol. t. I, *Trigonometriae liber tertius*, prop. X.

Ньютона [60]), Эйлера [61]), Босковича [62]). Простота, отличающая эти послѣднія доказательства, имѣетъ причиною знаніе *a priori* той формулы, геометрическое выраженіе которой требуется найти. Доказательства же Герона и Арабовъ имѣютъ то преимущество, что они естественны и носятъ на себѣ печать изобрѣтенія. Но, по всей вѣроятности, открытіе этой формулы первоначально сдѣлано было путемъ алгебраическимъ, при помощи выраженія перпендикуляра; это должно быть въ особенности справедливо относительно Индѣйцевъ, потому что такой родъ доказательства совершенно въ духѣ ихъ математическихъ изслѣдованій, основывавшихся на соединеніи алгебры съ геометріею.

Оканчивая наши замѣчанія по поводу этой формулы, скажемъ еще нѣсколько словъ о трехъ числахъ 13, 14 и 15, которыя употреблены были Индѣйцами для числоваго примѣра. Числа эти весьма замѣчательны тѣмъ, что они какъ бы неразрывно связаны съ формулой. Это числа встрѣчающіяся не только у Индѣйцевъ въ разныя эпохи, отдаленныя одна отъ другой на нѣсколько столѣтій, но также у Герона Александрійскаго, у Герона младшаго [63]), у трехъ братьевъ Арабовъ: Мохаммеда, Гамета и Газена; у Леонарда изъ Пизы, у Іордана, Луки Бурго, Георгія Валла [64]), у Тарталеа и почти у всѣхъ писателей, употреблявшихъ эту формулу. Отрывокъ латинской геометріи, о которомъ мы говорили выше,

---

[60]) *Arithmétique universelle;* t. I, problème 11.

[61]) Петербургскіе *Novi Commentarii;* t. I, 1747 и 1748.

[62]) *Opera* etc. t. V, opus. 14.

[63]) См. его *Трактатъ о Геодезіи,* рукопись находящаяся въ королевской библіотекѣ подъ n° 2013.

Барокки издалъ переводъ (съ комментаріями) Трактата о Геодезіи Герона младшаго и его книги о военныхъ машинахъ подъ заглавіемъ: *Heronis mechanici liber de Machinis bellicis, necnon liber de Geodaesià;* in—4°, Venetiis, 1572. Но рукопись, которою онъ пользовался, не полна и формулы площади треугольника въ ней нѣтъ.

[64]) *Georgii Vallae Placentini viri Clariss. De expetendis et fugiendis rebus opus*, etc. 2 vol. Venet. 1551, lib. XIV, et *Geometriae* V, cap. VII, *Dimensio universalis in omni triangulo.*

и *Margarita philosophica* суть, можетъ быть, единственныя сочиненія, въ которыхъ не входятъ эти числа; потому что для числоваго приложенія формулы въ нихъ взятъ прямоугольный треугольникъ; но и въ этихъ сочиненіяхъ тѣже три числа употребляются въ другомъ мѣстѣ, именно при вычисленіи площади треугольника посредствомъ длины перпендикуляра. Въ той же задачѣ опять встрѣчаемъ эти три числа въ алгебрѣ Могаммеда Бенъ Муза [65]) (одного изъ трехъ братьевъ Арабовъ).

Для историка интересно то обстоятельство, что повсюду встрѣчается употребленіе формулы, о которой идетъ рѣчь, и въ особенности тѣхъ же трехъ чиселъ 13, 14 и 15, которыя находимъ въ самыхъ древнихъ сочиненіяхъ и у всѣхъ народовъ: у Грековъ, почти отъ самаго начала до упадка Александрійской школы; у Индѣйцевъ, Римлянъ, Арабовъ, и, со времени возрожденія, во всѣхъ странахъ Европы, гдѣ только распространялись науки.

Повсемѣстное употребленіе этихъ трехъ чиселъ повидимому указываетъ на ихъ общее происхожденіе. Такова была сначала и наша мысль, и мы смотрѣли на эти три числа, какъ на счастливое обстоятельство, которое могло бы бросить свѣтъ на характеръ и размѣры научныхъ сношеній между Индіею и Греціею въ отдаленныя отъ насъ времена. Но мы скоро убѣдились, что, по всей вѣроятности, числа эти не представляютъ, какъ мы надѣялись прежде, такого историческаго пособія. Дѣйствительно, для числоваго приложенія при вычисленіи площади треугольника посредствомъ вышеупомянутой формулы, или посредствомъ перпендикуляра, естественнѣе всего искать такія три числа, при которыхъ площадь, а слѣдовательно и перпендикуляръ, выражались бы въ раціональныхъ числахъ, Рѣшеніе подобнаго вопроса не представляетъ затрудненій. Оно приводится къ построенію въ раціональныхъ числахъ двухъ прямоугольныхъ треугольни-

---

[65]) *The Algebra of Mohammed ben Musa, edited and translated by F. Rosen.* London, 1831, in—8°, стр. 82 англійскаго и стр. 61 арабскаго текста.

ковъ, имѣющихъ общую сторону. Именно такъ поступалъ и Брамегупта, какъ мы сказали это по поводу его § 34. Слѣдуетъ также замѣтить, что способъ построенія прямоугольнаго треугольника въ числахъ раціональныхъ и цѣлыхъ былъ извѣстенъ Грекамъ и Римлянамъ, которые пользовались для этого двумя формулами, изъ которыхъ одна найдена была Пиѳагоромъ, а другая Архитасомъ, или Платономъ.

Изъ всѣхъ паръ прямоугольныхъ треугольниковъ, выраженныхъ въ цѣлыхъ раціональныхъ числахъ и имѣющихъ общую сторону, слѣдуетъ конечно предпочесть ту, для которой эти числа самыя малыя; таковы именно два треугольника, имѣющіе стороны 5, 12, 13 и 9, 12, 15.

Помѣщая эти треугольники такъ, чтобы равныя стороны совпадали, а двѣ другія стороны прямаго угла лежали одна на продолженіи другой, мы и получимъ косоугольный треугольникъ, основаніе котораго есть 14, а двѣ другія стороны 13 и 15. Такимъ образомъ различные геометры, каждый съ своей стороны, могли придти къ треугольнику, выражаемому числами 13, 14 и 15. Впрочемъ мы должны сказать, что изъ тѣхъ же двухъ прямоугольныхъ треугольниковъ можно составить треугольникъ болѣе простой. Для этого надобно стороны 9 и 5 наложить одна на другую, тогда получимъ треугольникъ, основаніе котораго будетъ 4 и стороны 13 и 15; онъ будетъ имѣть, какъ и первый, высоту равную 12. Но это треугольникъ тупоугольный; перпендикуляръ его падаетъ внѣ основанія; и, хотя такой случай можетъ представляться столь-же часто какъ случай остроугольнаго треугольника, но его обыкновенно считаютъ менѣе удобнымъ для примѣра. Поэтому естественно выбираютъ треугольникъ со сторонами 13, 14 и 15.

Эти соображенія показываютъ, что, если Индѣйцы употребляли для приложенія формулы площади треугольника тѣже три числа 13, 14 и 15, какъ и Геронъ старшій, то изъ этого еще не слѣдуетъ заключать, что они заимствовали эту формулу у Александрійскаго геометра. Но если бы они и получили ее оттуда, права Брамегупты на званіе искуснаго

геометра нисколько бы отъ этого не пострадали, такъ какъ въ его сочиненіи встрѣчаемъ гораздо болѣе важную формулу и болѣе трудные вопросы, которыхъ не находимъ и слѣда у Грековъ.

Въ § 28 сочиненія Брамегупты даются выраженія діагоналей четыреугольника, вписаннаго въ кругъ, въ функціи сторонъ. Это формулы извѣстныя. Съ помощію ихъ рѣшается задача о *построеніи четыреугольника, способнаго вписываться въ кругъ, по даннымъ четыремъ сторонамъ.* Такимъ образомъ индѣйскій геометръ зналъ рѣшеніе этой задачи. Обстоятельство это не лишено значенія, потому что, когда этой задачей начали заниматься новые геометры, то она нѣкоторое время считалась знаменитой и не всѣмъ удалось рѣшить ее.

Въ примѣчаніяхъ нашихъ къ § 38, составляющему продолженіе этой же задачи, мы предложимъ краткій перечень геометровъ, занимавшихся ею.

Чтобы не слишкомъ увеличивать размѣры настоящаго Примѣчанія, мы опустимъ замѣтки, къ которымъ могли бы дать поводъ предложенія §§ 23, 25, 29, 30, 31 и 32. Скажемъ только, что вторая часть §§ 30, 31, представляетъ довольно замѣчательное предложеніе. Брамегупта показываетъ, какъ можно вычислить перпендикуляръ, опущенный изъ точки пересѣченія двухъ діагоналей *трапеціи* на ея основаніе, и даетъ (не указывая способа вычисленія) выраженіе продолженія этого перпендикуляра до верхняго основанія. Изъ этого выраженія мы непосредственно заключаемъ, что *перпендикуляръ проходитъ чрезъ средину верхняго основанія.* Предложеніе это доказать не трудно, но на него слѣдуетъ обратить вниманіе въ сочиненіи Брамегупты. Оно обнаруживаетъ, что здѣсь рѣчь идетъ о четыреугольникѣ, удовлетворяющемъ двумъ условіямъ: онъ долженъ именно вписываться въ кругъ и имѣть діагонали подъ прямымъ угломъ.

Приведемъ теперь четыре предложенія, заключающіяся въ §§ 35, 36, 37 и 38, съ помощію которыхъ, по нашему мнѣ-

нію, рѣшается вопросъ о построеніи четыреугольника, вписываемаго въ кругъ и имѣющаго всѣ части раціональныя.

§ 35. *Сторона берется произвольно; квадратъ ея дѣлится на какое нибудь количество; изъ частнаго вычитается это же количество; половина остатка есть катетъ прямоугольника; если къ этому прибавимъ то же количество, то получимъ діагональ.*

Такъ, если a будетъ сторона прямоугольника и b количество произвольное, то

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}-b\right)$$

будетъ катетъ, а

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}-b\right)+b=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}+b\right)$$

— діагональ. Дѣйствительно

$$\frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{b}+b\right)^2=\frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{b}-b\right)^2+a^2.$$

На основаніи того, что мы уже сказали объ этой формулѣ въ примѣненіи ея къ построенію прямоугольнаго треугольника, нельзя сомнѣваться, что здѣсь рѣчь идетъ о построеніи прямоугольника, котораго діагонали, также какъ и стороны, выражались бы въ числахъ раціональныхъ.

Площадь прямоугольника будетъ также раціональна, точно также какъ и діаметръ круга, описаннаго около прямоугольника, потому что здѣсь діаметръ равенъ діагоналямъ.

§ 36. *Пусть діагонали прямоугольника будутъ боками тетрагона; квадратъ стороны прямоугольника дѣлимъ на произвольное количество и частное вычитаемъ изъ этого количества; половина остатка, увеличенная катетомъ прямоугольника, будетъ основаніе, а, уменьшенная катетомъ, будетъ верхнее основаніе (cora ustus, верхъ) тетрагона.*

Означимъ черезъ a и b сторону и катетъ прямоугольника и черезъ c произвольное количество. Если бока тетра-

гона равны діагоналямъ прямоугольника, то основаніе его будетъ

$$\frac{1}{2}\left(c-\frac{a^2}{c}\right)+b, \text{ а верхъ } \frac{1}{2}\left(c-\frac{a^2}{c}\right)-b.$$

§ 37. *Въ тетрагонѣ, имѣющемъ три равныя стороны, каждая изъ трехъ равныхъ сторонъ равна квадрату діагонали прямоугольника. Четвертую сторону найдемъ, вычитая квадратъ катета изъ утроеннаго квадрата стороны прямоугольника.*

Если эта четвертая сторона есть наибольшая, то она будетъ основаніе тетрагона, если же наименьшая, то будетъ верхнее основаніе

Положимъ, что a есть сторона и b катетъ прямоугольника; a^2+b^2 будетъ квадратъ его діагонали. Мы предполагаемъ, что прямоугольникъ составленъ по правилу § 35, такъ что его діагональ $\sqrt{a^2+b^2}$ есть число раціональное.

Для величины трехъ равныхъ сторонъ тетрагона надобно взять (a^2+b^2) и тогда $(3a^2-b^2)$ будетъ выраженіе четвертой стороны.

§ 38. *Стороны и катеты двухъ прямоугольныхъ треугольниковъ, помноженные въ обратномъ порядкѣ на гипотенузы, суть четыре неравныя стороны трапеціи. Наибольшая сторона есть ея основаніе, наименьшая—верхъ, а двѣ остальныя—бока.*

Пусть a, b, c будутъ сторона, катетъ и гипотенуза перваго треугольника; a', b', c'— сторона, катетъ и гипотенуза втораго треугольника [66]). Четыре стороны трапеціи будутъ ac', bc', $a'c$, $b'c$.

Порядокъ, въ которомъ будутъ расположены эти стороны, указанъ авторомъ, такъ какъ наибольшая и наименьшая изъ нихъ должны быть основаніями, а двѣ среднія боками трапеціи.

---

[66]) Далѣе мы будемъ называть эти два треугольника *образующими* (triangles générateurs).

Предложенія, заключающіяся въ этихъ четырехъ параграфахъ, очевидно неполны, потому что въ нихъ даются только особыя построенія четырехъ сторонъ тетрагона. Но, съ одной стороны, этихъ сторонъ недостаточно для построенія тетрагона, за исключеніемъ перваго параграфа, гдѣ говорится о прямоугольникѣ; съ другой стороны, еслибы тетрагонъ и былъ построенъ, то ничего не сказано о его свойствахъ, которыя и должны составлять главный предметъ этихъ предложеній. Поэтому должно думать, что данное Брамегуптой построеніе сторонъ относится къ вопросу, который первоначально указанъ былъ въ заглавіи сочиненія, но потомъ исчезъ въ нѣкоторыхъ рукописныхъ спискахъ. Необходимо было догадаться, въ чемъ заключался этотъ вопросъ; безъ этого нельзя было ни понять, ни оцѣнить сочиненія Брамегупты. Толкователь Шатурведа, предложившій числовое приложеніе этихъ четырехъ предложеній, кажется, совершенно не зналъ назначенія ихъ; онъ не сообщаетъ намъ никакихъ данныхъ, никакихъ указаній по этому предмету.

Но, замѣтивъ, что въ большинствѣ предложеній, о которыхъ мы говорили, рѣчь идетъ о тетрагонѣ, вписанномъ въ кругъ, мы прежде всего подумали, что тоже должно сказать и о послѣднихъ четырехъ предложеніяхъ. Затѣмъ, такъ какъ первое изъ этихъ предложеній, будучи выражено алгебраически, представляетъ формулу построенія прямоугольника съ раціональными сторонами и діагоналями и такъ какъ оно въ сочиненіи слѣдуетъ за двумя теоремами несомнѣнно относящимися къ подобному же вопросу, именно къ построенію треугольника, котораго перпендикуляры, а слѣдовательно площадь и діаметръ описаннаго круга, выражались бы въ числахъ раціональныхъ,—то мы естественно пришли къ предположенію, что Брамегупта рѣшаетъ подобный же вопросъ для вписаннаго тетрагона.

И дѣйствительно, составляя тетрагонъ, вписанный въ кругъ, изъ четырехъ сторонъ, выраженія которыхъ даны въ каждомъ изъ четырехъ предложеній, и прилагая къ этой фигу-

рѣ различныя находящіяся въ другихъ параграфахъ формулы для вычисленія площади тетрагона, его діагоналей, перпендикуляровъ, діаметра описаннаго круга и отрѣзковъ между различными линіями,—мы замѣтили, что всѣ эти формулы даютъ выраженія раціональныя. Отсюда должно было заключить, что это и составляетъ предметъ четырехъ предложеній Брамегупты.

Предложеніе § 38 даетъ поводъ ко многимъ замѣчаніямъ.

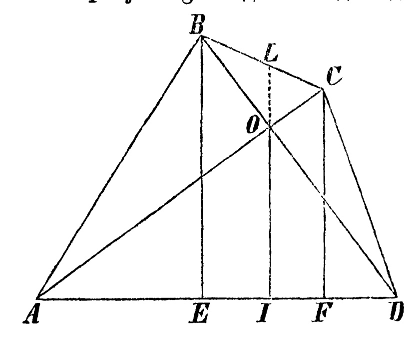
Четыре стороны тетрагона выражены произведеніями ac', bc', $a'c$ и $b'c$. У автора предписанъ порядокъ, въ которомъ онѣ должны быть размѣщены: двѣ первыя должны быть сторонами противолежащими. Изъ этого правила узнаемъ безъ труда, что онѣ должны происходить отъ умноженія двухъ катетовъ одного треугольника на гипотенузу другаго; а двѣ остальныя отъ умноженія катетовъ втораго треугольника на гипотенузу перваго. Въ самомъ дѣлѣ, сумма квадратовъ сторонъ ac', bc' равна суммѣ квадратовъ сторонъ $a'c$, $b'c$, потому что и та и другая сумма равна $c^2c'^2$. Изъ этого слѣдуетъ, что, если ac' есть сторона наибольшая, то bc' будетъ наименьшая; а потому ac' и bc', происходящія отъ умноженія сторонъ одного треугольника на гипотенузу другаго, будутъ при построеніи тетрагона противоположными сторонами.

Отсюда заключаемъ, что сумма квадратовъ двухъ противоположныхъ сторонъ равна суммѣ квадратовъ двухъ остальныхъ. Если четыреугольникъ предполагается вписаннымъ въ кругъ, то изъ этого равенства слѣдуетъ, что *діагонали этого четыреугольника наклонены подъ прямымъ угломъ.* Такимъ образомъ геометрически доказано, что въ § 38 слово *трапеція* прилагается исключительно къ четыреугольнику съ діагоналями подъ прямымъ угломъ.

Пусть $ABCD$ будетъ трапеція; имѣемъ

$$AB=ac',\ BC=a'c,\ CD=bc' \text{ и } AD=b'c.$$

Формулы § 28 даютъ для діагоналей слѣдующія выраженія:



$$AC = ab' + ba', \quad BD = aa' + bb'.$$

Площадь трапеціи можно бы вычислить по формулѣ § 21; но еще проще замѣтить, что, такъ какъ діагонали наклонены подъ прямымъ угломъ, то площадь равна половинѣ произведенія ихъ, т. е. $\frac{1}{2}(ab'+ba')(aa'+bb')$.

На основаніи второй части § 26, діаметръ описаннаго круга равенъ квадратному корню изъ суммы квадратовъ противоположныхъ сторонъ, т. е.

$$\sqrt{a^2c'^2+b^2c'^2} = c'\sqrt{a^2+b^2} = cc'.$$

Перпендикуляры BE, CF, опущенные изъ вершинъ B,C на основаніе AD, вычисляются по правилу § 22 изъ треугольниковъ ABD,ACD, какъ говоритъ это Брамегупта въ § 29; они будутъ:

$$BE = \frac{a}{c}(aa'+bb'), \quad CF = \frac{b}{c}(ab'+ba').$$

Отрѣзки, образуемые этими перпендикулярами на основаніи AD, будутъ:

$$AE = \frac{a}{c}(ab'-ba'), \quad DE = \frac{b}{c}(aa'+bb'),$$

$$DF = \frac{b}{c}(bb'-aa'), \quad AF = \frac{a}{c}(ab'+ba').$$

Отрѣзки, образуемые на двухъ діагоналяхъ точкою ихъ пересѣченія, вычисляются по правилу §§ 30, 31; они будутъ:

$$AO = ab', \quad CO = a'b, \quad BO = aa', \quad DO = bb'.$$

Перпендикуляръ OJ въ треугольникѣ AOD, вычисленный, какъ сказано въ §§ 30, 31 (или изъ подобія треугольниковъ EBD, JOD), будетъ $OJ=\frac{abb'}{c}$; его продолженіе OL до верхняго основанія, по правилу тѣхъ же параграфовъ, равно полусуммѣ перпендикуляровъ BE, CF безъ OJ; откуда $OL=\frac{1}{2}a'c$.

Нѣтъ надобности показывать выраженія отрѣзковъ, образуемыхъ пересѣченіемъ діагоналей съ перпендикулярами и съ противоположными сторонами; потому что всѣ эти отрѣзки въ какомъ угодно четыреугольникѣ выражаются раціонально въ функціи сторонъ, діагоналей и перпендикуляровъ.

Такимъ образомъ всѣ части фигуры будутъ раціональны.

Поэтому можно сказать, что предметъ предложенія § 38 состоитъ въ построеніи тетрагона, вписываемаго въ кругъ, имѣющаго четыре неравныя стороны и въ которомъ раціональны всѣ выраженія, вычисляемыя по правиламъ, даннымъ Брамегуптою въ его другихъ предложеніяхъ.

Въ индѣйскомъ сочиненіи выраженія эти не вычислены. Этому не надобно удивляться, потому что Брамегупта всегда ограничивается простымъ, по возмозможности краткимъ, изложеніемъ своихъ предложеній и не даетъ ни доказательствъ, ни подтвержденій *a posteriori*.

Мы дѣлаемъ это замѣчаніе, потому что Баскара даетъ выраженія діагоналей AC, BD, какъ новое предложеніе, которое онъ приписываетъ себѣ; и упрекаетъ предшествовавшихъ ему писателей, въ особенности Брамегупту, за то, что они опустили это правило, гораздо болѣе краткое, по его словамъ, чѣмъ формула § 28.

Величины сторонъ четыреугольника, получаемыя при помощи предложенія § 38, и величины, найденныя нами для отрѣзковъ OA, OB, OC, OD, показываютъ, что стороны четырехъ треугольниковъ AOB, BOC, COD, DOA, имѣющихъ при O прямой уголъ и составляющихъ четыреугольникъ, получаются послѣдовательно отъ умноженія трехъ сторонъ

каждаго изъ *образующихъ* треугольниковъ на стороны другаго. Напримѣръ, три стороны треугольника AOB суть ac', ab', aa': онѣ происходятъ отъ умноженія сторонъ c', b', a' втораго образующаго треугольника на сторону a перваго.

И такъ, при помощи двухъ образующихъ треугольниковъ можно не только опредѣлить четыре стороны четыреугольникъ, но и выполнить его построеніе. Для этого достаточно, какъ мы говорили, построить четыре прямоугольные треугольника AOB, BOC, COD, DOA и сложить ихъ вмѣстѣ. Такъ было понято построеніе четыреугольника различными толкователями, въ особенности Ганезой, въ его примѣчаніяхъ къ сочиненію Баскары; этимъ замѣнялось у нихъ условіе вписываемости въ кругъ, которое, по нашему предположенію, должно подразумѣваться въ сочиненіи Брамегупты. Отсюда понятно, какимъ бразомъ Шатурведа могъ дѣлать числовыя приложенія правилъ Брамегупты, не зная совсѣмъ о условіи вписываемости.

Изъ четырехъ сторонъ вписаннаго въ кругъ четыреугольника можно составить два другіе четыреугольника, вписанные въ тотъ же кругъ. Такъ, послѣдовательныя стороны $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ четыреугольника могутъ быть расположены въ порядкѣ $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ и еще въ порядкѣ $\alpha, \gamma, \beta, \delta$. Каждые два изъ этихъ трехъ четыреугольниковъ имѣютъ одну общую діагональ; такъ что, изъ шести діагоналей, только три различны между собою; остальныя же три соотвѣтственно равны тремъ первымъ [67]).

Если примѣнимъ это замѣчаніе къ фигурѣ Брамегупты, то два новые четыреугольника не будутъ болѣе *трапеція-*

---

[67]) Эти три четыреугольника имѣютъ одінаковую площадь. Ихъ три неравныя діагонали имѣютъ съ площадью и съ діаметромъ описаннаго круга слѣдущее соотношеніе: *Произведеніе трехъ діагоналей, раздѣленное на удвоенный діаметръ описаннаго круга, равно площади четыреугольника.*

Предложеніе это принадлежитъ кажется Альберту Жирару, который изложилъ его въ своей *Тригонометріи*. Мы не замѣтили, чтобы оно было воспроизведено гдѣ нибудь послѣ этого.

ми, т. е. діагонали ихъ не будутъ болѣе подъ прямымъ угломъ. Но онѣ будутъ все таки раціональны, также какъ всѣ другія части четыреугольника, вычисленныя нами для случая трапеціи. Такимъ образомъ два новые четыреугольника удовлетворяютъ общему вопросу, который, по нашему мнѣнію, предложенъ былъ авторомъ Индусомъ; такъ что онъ могъ бы включить эти два четыреугольника въ свое рѣшеніе.

Существованіе этихъ двухъ новыхъ четыреугольниковъ было извѣстно Баскарѣ, который далъ выраженіе для третьей діагонали; но онъ совсѣмъ не замѣтилъ, въ чемъ состоялѣ предметъ предложенія Брамегупты, т. е., не замѣтилъ ни условія вписываемости въ кругъ, не требованія раціональности различныхъ частей фигуры.

Третья діагональ равна $c'c$. Это есть ничто иное, какъ діаметръ круга, описаннаго около четыреугольника. Поэтому, два противоположные угла четыреугольника въ этомъ случаѣ будутъ прямые. Эта особая форма четыреугольника не была замѣчена Баскарой [68]), хотя она и заслуживаетъ вниманія.

Возьмемъ опять выраженія перпендикуляра CF и отрѣзка FD:

---

[68]) Это свойство четыреугольника, т. е. присутствіе въ немъ двухъ прямыхъ угловъ, показываетъ, что для вопроса о построеніи четыреугольника, вписываемаго въ кругъ и имѣющаго стороны, площадь, перпендикуляры и діаметръ круга, выраженные въ раціональныхъ числахъ, существуетъ весьма простое рѣшеніе, состоящее въ томъ, что за діаметръ круга берется какое нибудь раціональное число и квадратъ этого числа разлагается двумя различными способами на два квадрата. Корни этихъ квадратовъ будутъ сторонами четыреугольника. Образуемые такимъ образомъ четыреугольники будутъ тѣже, какъ и въ способѣ Брамегупты.

Очевидно, что можно еще поступать такъ: взять какой нибудь косоугольный треугольникъ ABC, котораго стороны и перпендикуляръ были бы раціональныя числа, и черезъ двѣ его вершины B,C возставить перпендикуляры соотвѣтственно къ сторонамъ AB,AC. Прямыя эти пересѣкутся въ точкѣ D и четыреугольникъ $ABDC$ будетъ удовлетворять вопросу. Измѣняя порядокъ сторонъ, получимъ *трапецію* Брамегупты.

$$CF=\frac{b}{c}\left(ab'+ba'\right),\ FD=\frac{b}{c}\left(bb'-aa'\right).$$

Двѣ линіи CF, FD суть катеты прямоугольнаго треугольника, котораго гипотенуза есть $CD=bc'$. Въ этихъ выраженіяхъ не входитъ явно количество c', слѣдовательно и сторона CD, а только количества a' и b', сумма квадратовъ которыхъ равна квадрату c'; или только линіи $CO=a'b$ и $DO=b'b$, сумма квадратовъ которыхъ равна квадрату CD. Выраженія эти будутъ, слѣдовательно, раціональными и тогда, когда c', или сторона CD не будутъ раціональны. Поэтому, линіи CF, FD даютъ геометрическое рѣшеніе слѣдующей задачи: *разложить данное число (квадратъ, или нѣтъ) на два квадрата, зная одно рѣшеніе вопроса.*

Чтобы рѣшить уравненіе $x^2+y^2=A$ *въ раціональныхъ числахъ, когда извѣстна одна система рѣшеній* x', y', *надобно взять произвольно три такія числа* a, b, c, *чтобы было* $a^2+b^2=c^2$; *тогда искомыя рѣшенія будутъ*

$$x=\frac{ay'+bx'}{c},\ y=\frac{by'-ax'}{c}.$$

Эти формулы, къ которымъ естественно приводитъ геометрическая задача Брамегупты, содержатъ въ себѣ въ неявномъ видѣ общія формулы для рѣшенія уравненія [69])

---

[69]) Дѣйствительно, замѣняя въ предложенномъ уравненіи $x^2+y^2=A$ и въ двухъ условныхъ уравненіяхъ $x'^2+y'^2=A$, $a^2+b^2=c^2$, перемѣнное x черезъ $x\sqrt{C}$, x' черезъ $x'\sqrt{C}$ и a черезъ $a\sqrt{C}$, получимъ:

$$Cx^2+y^2=A,$$
$$Cx'^2+y'^2=A,$$
$$Ca^2+b^2=c^2;$$

отъ тѣхъ же подстановокъ рѣшенія x и y обратятся въ

$$x=\frac{ay'+bx'}{c},$$

$$y=\frac{Cax'-by'}{c}.$$

$Cx^2 \pm A = y^2$,—формулы, которыя къ великому удивленію европейскихъ геометровъ найдены были въ алгебрѣ индѣйскаго автора, между тѣмъ какъ честь открытія ихъ въ послѣднемъ столѣтіи принадлежитъ великому Эйлеру, который первый изъ новѣйшихъ геометровъ получилъ ихъ.

Индѣйцы, въ своихъ математическихъ изслѣдованіяхъ, пользовались совмѣстно алгеброю и геометріею; алгеброю—для болѣе краткаго и простаго доказательства геометрическихъ предложеній, и геометріею—для доказательства правилъ ал-

---

Это и будутъ рѣшенія уравненія

$$Cx^2 + y^2 = A.$$

Замѣтимъ теперь, что рѣшенія эти удовлетворяютъ уравненію, каковы бы ни были два числа C и A, которыя слѣдовательно можно предполагать отрицательными. Такимъ образомъ уравненію можно дать видъ

$$Cx^2 \pm A = y^2$$

и рѣшенія его будутъ

$$x = \frac{ay' + bx'}{c}$$

$$y = \frac{Cax' + by'}{c}. \qquad (1)$$

Мы беремъ величину y съ положительнымъ знакомъ, потому что она входитъ въ уравненіе только въ квадратѣ и слѣдовательно знакъ ея не имѣетъ значенія.

Условныя уравненія между x', y' и между a, b, c

$$Cx'^2 \pm A = y'^2$$
$$Ca^2 + b^2 = c^2$$

показываютъ, что x', y' есть система рѣшеній предложеннаго уравненія, а $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$ — система рѣшеній уравненія

$$Cx^2 + 1 = y^2.$$

Формулы (1), служащія для рѣшенія уравненія

$$Cx^2 \pm A = y^2,$$

совершенно одинаковы съ находящимися въ алгебрѣ Брамегупты (отдѣлъ VII; стр. 364 и n^0 68 перевода Кольбрука).

Итакъ эти общія формулы легко выводятся изъ простаго геометрическаго вопроса, изслѣдованнаго индѣйскимъ авторомъ.

гебры и для нагляднаго представленія результатовъ анализа посредствомъ чертежей. Мы увидимъ много примѣровъ этому въ разныхъ мѣстахъ сочиненій Баскары и въ сочиненіяхъ Арабовъ, которые приняли отъ Индѣйцевъ это сліяніе алгебры съ геометріею. Весьма возможно, что Индѣйцы пришли къ рѣшенію неопредѣленныхъ уравненій второй степени путемъ геометрическихъ соображеній, почерпнутыхъ изъ вопроса § 38, и что въ этомъ заключается причина того, что въ *Трактатѣ ариѳметики и алгебры* Брамегупты вставленъ отрывокъ, относящійся къ геометріи. Такое мнѣніе подтверждается тѣмъ, что Арабы, кажется, также занимались неопредѣленными уравненіями второй степени и рѣшали ихъ посредствомъ геометрическихъ соображеній; въ этомъ они были, по всей вѣроятности, подражателями индѣйцевъ. Это кажется можно заключить изъ одного мѣста у Луки Бурго, который въ *Summa de Arithmetica, Geometria*, etc. (*distinctio prima, tractatus quartus*) упоминаетъ о сочиненіи *о квадратныхъ числахъ* Леонарда изъ Пизы, гдѣ находилось рѣшеніе уравненія $x^2+y^2=A$ *посредствомъ соображеній и фигуръ геометрическихъ.* Формулы Леонарда, приводимыя Лукою Бурго [70]), одинаковы съ тѣми, которыя мы вывели изъ геометрической задачи Брамегупты. Но Леонардъ вынесъ

---

[70]) Карданъ говоритъ также, что онъ заимствовалъ у Леонарда эти же формулы, помѣщенныя въ его *Practica Arithmetica* (гл. 16, вопр. 44). Вьетъ первый доказалъ ихъ въ началѣ IV книги своего сочиненія Ζητητικά. Его доказательство было аналитическое. Спустя немного времени, этимъ же вопросомъ неопредѣленнаго анализа занимался Александръ Андерсонъ, который посредствомъ геометрическихъ соображеній доказалъ формулы Діофанта, отличающіяся отъ формулъ Леонарда изъ Пизы (см. *Exercitationum mathematicarum Decas prima*. Paris, 1619, in—4°).

Въ историческихъ замѣткахъ о неопредѣленныхъ уравненіяхъ второй степени возводятъ начало трудовъ новыхъ геометровъ только до Фермата. Но прежде Фермата, слѣдовало бы упомянуть о Леонардѣ изъ Пизы, Лукѣ Бурго, Карданѣ и Вьетѣ, потому что они пользовались также тѣми самыми формулами, на которыхъ основывается и изъ которыхъ можетъ быть выведено общее рѣшеніе Эйлера.

свои математическія свѣдѣнія изъ Аравіи. Поэтому мы должны приписать его формулы для рѣшенія неопредѣленныхъ уравненіи второй степени Арабамъ, которые сами должны были получить ихъ отъ Индѣйцевъ.

Составивъ опредѣленное мнѣніе о вопросахъ, составлявшихъ предметъ §§ 21—38 въ сочиненіи Брамегупты, мы заинтересовались узнать, были ли тѣ же вопросы изслѣдованы у новыхъ геометровъ и въ какую эпоху; и нельзя ли сдѣлать какого нибудь сравненія между работами индѣйскихъ и европейскихъ геометровъ.

Вотъ что намъ удалось разыскать по этому предмету.

Бенедиктъ (J.—B. Benedictus) рѣшилъ вопросъ о *построеніи четыреугольника вписаннаго въ кругъ по четыремъ даннымъ сторонамъ* (см. его сборникъ подъ заглавіемъ: *Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber.* Taurini, 1585; in fol.). Задача эта была ему предложена принцемъ Карломъ Эмануиломъ Савойскимъ.

Въ 1584 году знаменитый Іосифъ Скалигеръ помѣстилъ невѣрное рѣшеніе этой задачи въ своемъ сочиненіи *Cyclometrica elementa duo* (Leyden, in fol.). Если черезъ a, b, c, d означимъ четыре данныя стороны, то изъ его рѣшенія выходило бы, что діаметръ круга, въ которомъ вписанъ четыреугольникъ съ такими четырьмя сторонами, долженъ выражаться черезъ $\sqrt{a^2+b^2+\sqrt{c^2+d^2}}$. Изъ этого слѣдовало бы, что задача допускаетъ два другія рѣшенія, въ которыхъ діаметрами круга были бы $\sqrt{a^2+c^2+\sqrt{b^2+d^2}}$ и $\sqrt{a^2+d^2+\sqrt{b^2+c^2}}$. Такимъ образомъ Скалигеръ рѣшалъ бы здѣсь посредствомъ прямой линіи и круга задачу, которая въ анализѣ должна зависѣть отъ уравненія третьей степени. Правда, что такое замѣчаніе, еслибы онъ его и сдѣлалъ, не могло бы остановить его; потому что, увлекшись своею литературною извѣстностію и имѣя притязаніе занять первое мѣсто также и между математиками, онъ рѣшилъ нетолько задачу о квадратурѣ круга, которая составляла предметъ его *Cyclometrica elementa*, но даже задачу о вписываніи въ кругъ всякаго

правильнаго многоугольника съ нечетнымъ числомъ сторонъ [71]).

Сочиненіе это тотчасъ по появленіи было опровергнуто Errard'омъ, Bar-le-Duc'омъ, королевскимъ инженеромъ [72]) и впослѣдствіи Вьетомъ [73]), Адріаномъ Романомъ [74]) и Клавіемъ [75]).

По этому же поводу Вьетъ рѣшилъ вопросъ о четыреугольникѣ и обнаружилъ ложныя сужденія, которыя ввели Скалигера въ ошибку. Рѣшеніе Вьета появилось въ 1596 г. въ *Pseudo-Mesolabum*.

Затѣмъ встрѣчаемъ Преторія, который посвятилъ этому вопросу книгу подъ заглавіемъ: *Problema, quod jubet ex quatuor rectis lineis datis quadrilaterum fieri, quod sit in circulo, aliquot modis explicatum; a Johanne Praetorio Joachimico.* Norinbergae, 1598, in-4° (36 страницъ).

Это сочиненіе драгоцѣнно во многихъ отношеніяхъ; во первыхъ потому, что въ немъ содержится нѣсколько указаній на исторію задачи; во вторыхъ потому, что рѣшая тотъ же вопросъ, какъ и Брамегупта, относительно условія раціональности нѣкоторыхъ частей фигуры, оно даетъ возможность сравненія между Индѣйцами и нами по поводу во-

---

[71]) *Elementum prius*; prop. XV.

[72]) Réfutation de quelques propositions du livre de M. De l'Escale, de la quadrature du cercle, par lui intitulé: *Cyclometrica elementa duo.* Lettre adressée au roi. Paris, septembre, 1594: chez Auray, rue St. Jean-de-Beauvais, au Bellérophon couronné.

Немногихъ словъ достаточно Эрраду, чтобъ доказать ложность 5-го и 6-го предложеній Скалигера, изъ которыхъ выходитъ: 1° *Que le circuit du dodécagone inscrit au cercle peut plus que le circuit du cercle;* и 2° *que le carré du circuit du cercle est décuple au carré du diamètre.*

[73]) Опроверженіе это составляетъ предметъ сочиненія *Pseudo-Mesolabum et alia quaedam adjuncta capitula*, появившагося въ 1596 году.

[74]) *Apologia pro Archimede, ad clariss. virum Josephum Scaligerum. Exercitationes cyclicae contra J. Scaligerum, Orontium Finaeum, et Raymarum Ursum, in decem dialogos distinctae.* Wurceburgi, 1597, in fol.

[75]) См. его Geometria practica.

проса, поставленнаго отдѣльно и оригинально какъ у индѣйскаго, такъ и у европейскаго писателя.

Преторій говоритъ, что уже съ давняго времени занимались этой задачей и отыскивали діаметръ описаннаго круга и площадь четыреугольника; далѣе, что Регіомонтанъ также предлагалъ себѣ эти вопросы и послѣ того Симонъ Якобъ вычислилъ діагонали четыреугольника и діаметръ круга. Наконецъ онъ приводитъ рѣшеніе Вьета и прибавляетъ, что въ самое послѣднее время даны были еще другія рѣшенія, которыя впрочемъ ему неизвѣстны.

Послѣ этого историческаго вступленія Претарій рѣшаетъ самую задачу, т. е. находитъ выраженія діагоналей и показываетъ какъ вычисляется діаметръ.

Затѣмъ онъ предлагаетъ себѣ найти такія четыре числа, которыя, будучи приняты за стороны четыреугольника, приводили бы къ раціональнымъ выраженіямъ какъ діагоналей, такъ и діаметра круга. Этотъ вопросъ онъ рѣшаетъ различными способами. Съ помощію одного онъ находитъ для сторонъ четыреугольника тѣже четыре числа 60, 52, 25 и 39, которыя употреблялъ Брамегупта. Но онъ размѣщаетъ ихъ въ другомъ порядкѣ и получаетъ такимъ образомъ не тотъ четыреугольникъ, какъ у индѣйскаго геометра [76]).

---

[76]) Преторій беретъ какой нибудь треугольникъ ABC, въ которомъ стороны и перпендикуляръ раціональны. Оно строитъ его при помощи двухъ прямоугольныхъ треугольниковъ, какъ мы говорили объ этомъ по поводу § 34 Брамегупты. Двѣ стороны этого треугольника AB, AC берутся за двѣ послѣдовательныя стороны искомаго четыреугольника; а третья сторона BC—за стягивающую ихъ діагональ. Остается построить двѣ другія стороны четыреугольника; Преторій опредѣляетъ длину ихъ, проводя нѣкоторыя линіи и составляя двѣ пропорціи.

Рѣшеніе это можетъ быть значительно упрощено; мы замѣтили именно, что достаточно провести въ точкахъ B и C перпендикуляры соотвѣтственно къ сторонамъ AB и AC. Эти прямыя и будутъ искомыя стороны.

Это построеніе показываетъ, что четыреугольникъ Преторія имѣетъ два прямые угла и что вторая діагональ его есть ничто иное, какъ діаметръ описаннаго круга; Преторій можетъ быть, этого не замѣтилъ.

Въ слѣдующемъ примѣрѣ онъ замѣчаетъ, что можно перемѣнить мѣсто двухъ сторонъ и получаетъ другой вписанный четыреугольникъ, составленный изъ другихъ чиселъ, именно: 52, 56, 39 и 33. Мы убѣдились, что въ такомъ четыреугольникѣ, какъ и въ четыреугольникѣ Брамегупты, діагонали наклонены подъ прямымъ угломъ; Преторій на это не обратилъ вниманія. Этотъ геометръ не замѣтилъ также, что кромѣ діагоналей и діаметра круга различныя другія части четыреугольника, которыя вычислялъ Брамегупта, выражаются также въ числахъ раціональныхъ. Поэтому можно сказать, что Брамегупта глубже вникъ въ этотъ вопросъ и изслѣдовалъ его полнѣе, нежели новые геометры.

Для послѣдняго примѣра Преторій беретъ четыреугольникъ, послѣдовательныя стороны котораго выражены числами 33, 25, 16 и 60 и говоритъ, что „это тѣ самыя числа, „которыя предложилъ Симонъ Якобъ, не указавшій того „пути, который привелъ его къ этому рѣшенію.“ Это заставляетъ предполагать, что Симонъ Якобъ рѣшилъ не только вопросъ о построеніи вписаннаго въ кругъ четыреугольника по даннымъ четыремъ сторонамъ, но также и вопросъ о нахожденіи въ раціональныхъ числахъ такихъ четырехъ сторонъ, при которыхъ діагонали четыреугольника и діаметръ круга были бы также раціональны [77]).

---

[77]) Симонъ Якобъ не упоминается ни однимъ писателемъ по исторіи математики и, кажется, въ настоящее время совершенно неизвѣстенъ; однако, въ первомъ томѣ *Математической библіотеки* Мургарда, сказано, что онъ написалъ по нѣмецки два сочиненія, имѣвшія много изданій. Первое изъ нихъ подъ заглавіемъ *Rechnung auf der Linie* (Francfurt, in 8⁰) явилось въ 1557 и было перепечатано въ 1589, 1590, 1599, 1607, 1608, 1610 и 1613 годахъ. Второе: *Ein neu und wohl-gegründet Rechenbuch auf der Linie und Ziffern, samt der Welschen Practic*, etc, in 4⁰ появилось въ 1560 и было перепечатано въ 1565, 1600 и 1612 годахъ.

Въ Математической Библіотекѣ Мургарда находимъ еще, что Симонъ Якобъ, профессоръ математики въ Франкфуртѣ на Майнѣ, просматривалъ и издалъ въ 1564 году сочиненіе Апіана (Pierre Apian, 1500—1552) о торговыхъ расчетахъ.

Этотъ второй вопросъ, сколько намъ извѣстно, былъ рѣшенъ, послѣ Симона Якоба, только въ сочиненіи Преторія; хотя задача о построеніи вписаннаго четыреугольника по четыремъ даннымъ сторонамъ продолжала занимать нѣкоторыхъ геометровъ. Она рѣшена Лудольфомъ Фанъ-Цейленомъ въ *Problemata miscellanea* и также Снелліемъ въ примѣчаніяхъ, которыми онъ обогатилъ свой переводъ сочиненія Лудольфа съ голландскаго на латинскій языкъ. Хотя Снеллій приводитъ здѣсь сочиненіе Преторія, но вовсе не упоминаетъ о новыхъ вопросахъ, которые были рѣшены въ этомъ сочиненіи.

Упомянемъ еще о J. de Billy (1602—1679), весьма почтенномъ геометрѣ, который впрочемъ ошибся въ вопросѣ о построеніи вписаннаго четыреугольника по четыремъ сторонамъ; онъ думалъ, что это задача неопредѣленная и что можно взять еще одно условіе, напримѣръ какое нибудь соотношеніе между двумя діагоналями. Ему казалось, что онъ рѣшилъ этотъ вопросъ для даннаго отношенія діагоналей, а также для данной суммы и разности ихъ [78]).

Шутенъ упоминаетъ о Симонѣ Якобѣ два раза въ *Sectiones miscellaneae* и называетъ его *celebris arithmèticus* (см. *Exercitationes mathematicae*, p. 404 et 410). Отсюда мы узнаемъ, что геометръ этотъ придумалъ различныя прогрессіи, въ которыхъ каждый членъ представлялъ дробь, имѣющую числителемъ и знаменателемъ катеты прямоугольнаго треугольника, въ которомъ гипотенуза также раціональна.

[78]) *Diophantus geometra, sive opus contextum ex arithmetica et geometria simul*, etc. Paris, 1660, in 4°, p. 188 et 189.

Jacques de Billy, о которомъ Геильброннеръ и Монтукла едва упоминаютъ, былъ весьма ученый алгебраистъ и его уважали самые знаменитые математики того времени, въ особенности Ферматъ и Баше-де-Мезиріакъ. Въ *Mémoires de Nicéron*, t. 40, находимъ списокъ большаго числа сочиненій, изданныхъ имъ, и еще большее число оставшихся въ рукописи; послѣднія принадлежали къ библіотекѣ іезуитовъ въ Дижонѣ; кажется, что они не перешли въ городскую библіотеку, потому что мы не нашли ни одного изъ нихъ въ каталогахъ Haenel'я.

Если они еще существуютъ, то желательно, чтобы изданъ былъ по крайней мѣрѣ разборъ или содержаніе этихъ рукописей, число которыхъ доходило до десяти.

По поводу § 21 мы говорили уже о геометрахъ, занимавшихся въ особенности изящною формулою площади четыреугольника.

Теорія вписаннаго четыреугольника не представляетъ въ настоящее время никакой трудности; она перешла въ элементарныя сочиненія, гдѣ дается теорема Птоломея о произведеніи двухъ діагоналей и еще другая теорема объ отношеніи этихъ линій; изъ двухъ этихъ предложеній получаются величины діагоналей. Лежандръ пополнилъ эту теорію, предложивъ въ примѣчаніяхъ къ его *Elémens de Géométrie* доказательство, путемъ вычисленія, формулъ площади четыреугольника и діаметра описаннаго круга. Но я не знаю, рѣшалъ ли кто нибудь послѣ Преторія вопросъ о построеніи вписаннаго четыреугольника, имѣющаго раціональныя части; и даже—обращено ли было гдѣ нибудь вниманіе на сочиненіе этого геометра. Такъ какъ вопросъ этотъ уже найденъ въ трактатѣ Брамегупты, то сочиненіе Преторія должно, какъ намъ кажется, получить особое значеніе. [79]).

Этимъ мы оканчиваемъ наши замѣтки о восемнадцати первыхъ параграфахъ геометрическаго отдѣла сочиненія Бра-

---

[79]) О Преторіѣ (J. Praetorius, 1557—1616) обыкновенно упоминаютъ только какъ объ изобрѣтателѣ геодезическаго инструмента, называемаго мензулой (planchette), который долгое время носилъ названіе *Tabula Praetoriana;* но это былъ геометръ весьма искусный и уважаемый въ свое время. Снеллій, приводя его сочиненіе о четыреугольникѣ, выражается такъ: *Clarissimus J. Praetorius harum artium scientia nulli secundus, de quatuor lineis in circulo integrum librum publicavit, in quo multis modis ingeniosa sane et acute hoc idem problema effici posse demonstravit.*

Знаменитый профессоръ математики Доппельмайеръ посвятилъ ему замѣтку въ своемъ сочиненіи: *Nachricht von den Nürnberger Mathematicis und Künstlern* (1730 in-fol.); изъ нея мы узнаемъ, что Преторій печаталъ немного сочиненій, но что многія рукописи его сохранились въ Альторфѣ, гдѣ онъ жилъ въ теченіе сорока лѣтъ, окруженный всеобщимъ уваженіемъ. Извлеченіе изъ этой замѣтки помѣщено въ сочиненіи Маринони по практической геодезіи: *De re ichnographica, cujus hodierna praxis exponitur*, etc. Viennae Austriae, 1751, in 4°.

мегупты. Другіе параграфы представляютъ мало интереса. Здѣсь мы обратимъ вниманіе только на отношеніе окружности къ діаметру, приведенное въ § 42, и принятое равнымъ $\sqrt{10}$. Суйк по англійскому тексту [80]), можно думать, что Брамегупта смотрѣлъ на это выраженіе, какъ на *точную* величину отношенія окружности къ діаметру. Шатурведа, въ своихъ примѣчаніяхъ, думалъ, кажется, точно также. Насъ нисколько ни удивляетъ, что такъ могъ думать этотъ толкователь; но трудно повѣрить, чтобы геометръ, который былъ способенъ написать теорію четыреугольника вписаннаго въ кругъ и рѣшить вопросы, найденные нами въ сочиненіи Брамегупты, могъ впасть въ такую ошибку. Правда, что квадратура круга была также камнемъ преткновенія для многихъ новыхъ геометровъ и вовлекла ихъ въ подобныя же ошибки, не смотря на то, что многіе изъ нихъ дали доказательства несомнѣнныхъ и глубокихъ познаній въ математикѣ. Достаточно указать на Оронція Фине и на Григорія С. Винцента.

Выраженіе $\sqrt{10}$ есть именно то отношеніе, которое Скалигеръ приписывалъ себѣ и думалъ, что онъ доказалъ его геометрически; но оно, еще задолго до этого, было извѣстно въ Европѣ и признавалось только приближеннымъ. Его приписывали Арабамъ и Индѣйцамъ и предполагали, что у этихъ народовъ оно считалось точнымъ.

Дѣйствительно, Пурбахъ (1425—1461) въ своей книгѣ подъ заглавіемъ: *Tractatus Georgii Peurbachii super propositiones Ptolemaei de sinibus et chordis* выражается слѣдующимъ образомъ: *Indi vero dicunt, si quis sciret radices numerorum recta radice carentium invenire, ille faciliter inveniret quanta esset diameter respectu circumferentiae. Et secundum eos, si diameter fuerit unitas, erit circumferentia radix de decem: si duo, erit radix de quadraginta: si tria,*

---

[80]) *The diameter and the square of the semidiameter, being severally multiplied by three, are the practical circumference and area. The square roots extracted from ten times the squares of the same are the neat values.*

erit radix de nonaginta: et sic de aliis, etc. Регіомонтанъ (1436—1476) напротивъ приписываетъ отношеніе $\sqrt{10}$ Арабамъ. Вотъ его слова: *Arabes olim circulum quadrare polliciti ubi circumferentiae suae aequalem rectam descripsissent, hanc pronuntiavere sententiam: si circuli diameter fuerit ut unum, circumferentia ejus erit ut radix de decem. Quae sententia cum sit erronea.....* Бутеонъ (Butéon, 1492—1572) во второй книгѣ своего сочиненія *De quadratura circuli, libri duo* (Lyon, 1559, in 8°), гдѣ онъ излагаетъ исторію этой задачи и опровергаетъ ложныя заключенія, къ которымъ она давала поводъ, высказываетъ такое же мнѣніе, какъ и Регіомонтанъ, въ слѣдующихъ словахъ: *Tetragonismus secundum Arabes. Omnis circuli perimetros ad diametrum decupla est potentia..... Patet igitur hujusmodi tetragonismum secundum Arabes esse falsum, et extra limites Archimedis.*

О геометріи Баскары Ачаріа.

Сочиненія Баскары состоятъ, также какъ и сочиненія Брамегупты, изъ трактата ариѳметики, называемаго авторомъ *Лилавати* (*Lilavati*) и изъ трактата алгебры подъ названіемъ *Виджа-Ганита* (*Bija Ganita*).

Геометрія заключается въ Лилавати и занимаетъ главы VI, VII, VIII, IX, X и XI въ §§ 133—247.

Глава VI есть самая значительная; въ ней говорится о плоскихъ фигурахъ; прочія главы имѣютъ мало важности и носятъ тѣ же заглавія: excavations, stacks, и пр. какъ и въ сочиненіи Брамегупты.

Нѣкоторые геометрическіе вопросы встрѣчаются также въ Виджа-Ганита; здѣсь они являются, какъ приложенія правилъ алгебры, и рѣшены посредствомъ вычисленія. Въ этомъ же сочиненіи находимъ нѣсколько предложеній алгебры, доказанныхъ геометрическимъ путемъ. Мы укажемъ на эти отдѣльныя предложенія послѣ того, какъ разберемъ собственно геометрическій отдѣлъ.

Отдѣлъ этотъ можно раздѣлить на пять частей: три первыя будутъ относиться къ треугольнику вообще, къ треу-

гольнику прямоугольному и къ четыреугольнику; четвертая будетъ заключать въ себѣ нѣкоторыя предложенія о кругѣ; въ пятой будутъ находиться правила для измѣренія объемовъ и глава объ употребленіи гномона.

Первая часть: *Предложенія о треугольникѣ.*

1. Теорема о квадратѣ гипотенузы, § 134.

2. Выраженіе отрѣзковъ, образуемыхъ перпендикуляромъ на основаніи треугольника, и выраженіе перпендикуляра, §§ 163, 164, 165, 166.

3. Площадь треугольника равна половинѣ произведенія основанія на перпендикуляръ, § 164 [81]).

4° Формула площади треугольника въ функціи сторонъ, § 167.

О формулѣ площади четырегоульника будетъ сказано ниже.

Вторая часть: *О прямоугольномъ треугольникѣ.*

1°. Правила для построенія прямоугольнаго треугольника въ раціональныхъ числахъ *a*) когда данъ катетъ, §§ 139, 140, 141, 143, 145; и *b*) когда дана гипотенуза, §§ 142, 144, 146.

2°. Построить прямоугольный треугольникъ, когда извѣстны: катетъ и сумма или разность гипотенузы съ другимъ катетомъ §§ 147, 148, 149, 150, 151, 152 и 153.

---

[81]) Предложеніе, что площадь треугольника равна половинѣ произведенія основанія на перпендикуляръ, доказывается комментаторомъ Ганезой иначе, нежели какъ мы привыкли доказывать, слѣдуя Евклиду.

Ганеза чертитъ прямоугольникъ на основаніи треугольника съ высотою, равною половинѣ перпендикуляра. Верхнее основаніе прямоугольника отсѣкаетъ отъ треугольника другой меньшій треугольникъ, который раздѣленъ перпендикуляромъ на два прямоугольные треугольника. Эти послѣдніе соотвѣтственно равны двумъ треугольникамъ, которые нужно прибавить къ нижней части даннаго треугольника, чтобы пополнить прямоугольникъ. Изъ этого онъ заключаетъ, что площадь треугольника равна площади прямоугольника, т. е. равна произведенію основанія на половину перпендикуляра.

Доказательство это чрезвычайно просто; оно стольже наглядно, какъ и убѣдительно. Оно употреблялось у Арабовъ и было принято въ эпоху возрожденія, преимущественно Лукою Бурго и Тарталеа.

3°. Правило для нахожденія на сторонѣ прямоугольнаго треугольника точки, для которой сумма разстояній отъ концовъ гипотенузы равна суммѣ двухъ катетовъ, §§ 154, 155.

4°. Построить прямоугольный треугольникъ, въ которомъ извѣстны: гипотенуза и сумма или разность двухъ катетовъ, §§ 156, 157, 158.

Третья часть: *Предложенія о четыреугольникѣ.*

1°. Полусумма сторонъ пишется четыре раза, изъ каждой отдѣльно вычитаются стороны и составляется произведеніе остатковъ. Квадратный корень изъ этого произведенія будетъ площадь, *неточная* для четыреугольника, но *точная* какъ было доказано, для треугольника; §§ 167, 168.

Это есть формула Брамегупты, которую Баскара списалъ, не понявъ ея и не замѣтивъ, что здѣсь рѣчь идетъ о четыреугольникѣ, вписанномъ въ кругъ. Вотъ почему онъ говоритъ, что правило это невѣрно для четыреугольника, и дальше доказываетъ, что нелѣпо искать площадь четыреугольника, въ которомъ извѣстны только стороны, потому что изъ тѣхъ же сторонъ, говоритъ онъ, можно составить много различныхъ четыреугольниковъ [82]). §§ 169, 170, 171, 172.

---

[82]) Толкователь Суріадаза, авторъ двухъ превосходныхъ примѣчаній къ Лилавати и къ Виджа-Ганита (Colebrooke; *Brahmegupta and Bhascara, algebra*, p. XXVI), не былъ, кажется, болѣе Баскары искусенъ въ пониманіи предложенія Брамегупты Потому что онъ высказываетъ слѣдующее странное сужденіе для доказательства, что площадь треугольника есть точная, а четыреугольника неточная:

«Если три остатка сложимъ вмѣстѣ, то сумма ихъ будетъ равна полусуммѣ всѣхъ сторонъ. Отъ перемноженія трехъ остатковъ на эту сумму получится произведеніе квадрата перпендикуляра на квадратъ половины основанія. Это будетъ число квадратное, потому что квадратъ, умноженный на квадратъ, даетъ въ произведеніи также квадратъ. Извлекши квадратный корень, получимъ произведеніе перпендикуляра на половину основанія, т. е. площадь треугольника. Такимъ образомъ найдемъ точную площадь. Въ четыреугольникѣ произведеніе множителей не будетъ уже числомъ квадратнымъ, но будетъ ирраціонально. Приблизительный корень изъ него представитъ площадь фигуры; но все таки не точную, потому что корень этотъ, будучи раздѣленъ на перпендикуляръ, долженъ давать половину суммы основанія и верха.» (*Lilavati*, p. 72).

2°. Въ четыреугольникѣ равностороннемъ, т. е въ ромбѣ, площадь равна половинѣ произведенія двухъ діагоналей. Площадь прямоугольника есть произведеніе основанія на высоту; § 174.

3°. Въ четыреугольникѣ, котораго оба перпендикуляра равны, площадь есть произведеніе полусуммы двухъ основаній на перпендикуляръ; §§ 175, 177.

4°. Въ ромбѣ сумма квадратовъ двухъ діагоналей равняется учетверенному квадрату стороны; §§ 173—175.

5°. Формулы, опредѣляющія отрѣзки, образуемые на діагоналяхъ точкою ихъ соперес੍ѣченія, въ четыреугольникѣ, бока котораго перпендикулярны къ основанію; и выраженіе перпендикуляра, опущеннаго изъ этой точки на основаніе; §§ 159, 160.

6°. Зная стороны четыреугольника и одну его діагональ, найти другую діагональ, перпендикуляры и площадь; §§ 178—184.

Площадь есть сумма площадей двухъ треугольниковъ, имѣющихъ основаніемъ данную діагональ; § 184.

Предложенія, въ которыхъ рѣшены разныя части этого вопроса, не представляютъ никакихъ затрудненій. Они основываются на пропорціональности сторонъ въ равноугольныхъ треугольникахъ.

7°. Правило для составленія по четыремъ даннымъ сторонамъ четыреугольника, въ которомъ перпендикуляры равны между собой; §§ 185, 186.

8°. Правило для опредѣленія діагоналей четыреугольника; § 190.

Это то самое правило, которое дано Брамегуптою въ § 28 для четыреугольника вписаннаго въ кругъ. Но въ сочиненіи Баскары оно вовсе не относится къ вписанному четыреугольнику, потому что этотъ геометръ не произноситъ слова кругъ ни въ одномъ изъ своихъ предложеній, относящихся къ треугольнику и четыреугольнику, и потому, что онъ рѣшительно не зналъ, что предложенія Брамегупты относятся къ четыреугольнику вписанному.

Нетрудно убѣдиться, что правило, предложенное Баскарой, относилось, по понятію этого геометра, къ четыреугольнику съ прямоугольными діагоналями, составляемому при помощи двухъ *образующихъ* прямоугольныхъ треугольниковъ, какъ мы говорили объ этомъ въ примѣчаніяхъ къ § 38 Брамегупты. Это подтверждается болѣе простымъ правиломъ, годнымъ единственно въ такомъ частномъ случаѣ, правиломъ, которымъ Баскара замѣняетъ свое общее правило въ §§ 191, 192.

Другое замѣчаніе Баскары также ясно доказываетъ его незнаніе о томъ, что изслѣдованія Брамегупты относились къ четыреугольнику вписанному въ кругъ; именно: онъ упрекаетъ его за общее правило для опредѣленія діагоналей, которыя, какъ онъ говоритъ, неопредѣленны. Вотъ это мѣсто изъ сочиненія Баскары:

«§§ 187—189. Стороны имѣютъ величины 52 и 39 [83]); верхъ «равенъ 25 и основаніе 60. Числа эти были взяты древними «писателями для примѣра фигуры, имѣющей неравные пер«пендикуляры; и для діагоналей найдены были точныя вели«чины 56 и 63.

«Требуется составить изъ тѣхъ же четырехъ сторонъ дру«гой четыреугольникъ, имѣющій другія діагонали и именно «такой, чтобы перпендикуляры его были равны.»

Баскара рѣшаетъ этотъ вопросъ и потомъ прибавляетъ:

«Такимъ образомъ, при тѣхъ же сторонахъ въ тетрагонѣ «могутъ быть различныя діагонали.

«Діагонали эти неопредѣленны, но Брамегуптою и други«ми онѣ были найдены, какъ бы опредѣленныя. Ихъ правило «слѣдующее:

---

[83]) Замѣтимъ здѣсь мимоходомъ, что Баскара для выраженія числа 39 прибѣгаетъ, подобно Римлянамъ, къ вычитанію; онъ говоритъ: 40 *безъ* 1 (*One less than forty*). Но, кажется, такой способъ составленія чиселъ не былъ общеупотребителенъ въ Индіи. Шатурведа ему не слѣдуетъ; онъ всегда произноситъ *тридцать девять* (*thirty—nine*). (См. его комментаріи къ §§ 21 и 32 Брамегупты.)

«§ 190. *Правило.* Если суммы произведеній сторонъ, при-«мыкающихъ къ концамъ діагоналей, раздѣлимъ одна на дру-«гую и умножимъ на сумму произведеній противоположныхъ «сторонъ, то квадратные корни изъ результатовъ будутъ діа-«гоналями трапеціи.

«Противъ этого способа находить діагонали можно сдѣлать «то возраженіе, что онъ очень длиненъ, какъ я обнаружилъ «это, предложивъ способъ болѣе короткій.

«§ 191—192. *Правило.* Катеты и стороны двухъ прямо-«угольныхъ треугольниковъ, помноженные въ обратномъ по-«рядкѣ на гипотенузы, суть бока; и такимъ образомъ обра-«зуется трапеція, діагонали которой могутъ быть выведены «изъ двухъ треугольниковъ.

«Произведеніе катетовъ, сложенное съ произведеніемъ сто-«ронъ, есть діагональ; сумма произведеній катетовъ и сто-«ронъ, перемноженныхъ между собою въ обратномъ поряд-«кѣ, есть другая діагональ.

«Послѣ того, какъ былъ предложенъ этотъ краткій ме-«тодъ, я не знаю, зачѣмъ даже лучшіе писатели продолжали «употреблять правило болѣе трудное.»

Баскара прибавляетъ: «Если измѣнить мѣсто верхняго ос-«нованія и одного изъ боковъ, то одна изъ діагоналей сдѣ-«лается равна произведенію гипотенузъ двухъ прямоугольныхъ «треугольниковъ.»

Изъ этого мѣста мы должны заключить, что Баскара не понималъ заимствованныхъ имъ у Брамегупты предложеній. Брамегупта, какъ мы уже говорили, не излагалъ формулъ §§ 191, 192 Баскары, потому что онѣ, по его мнѣнію, представляли только повѣрку раціональности діагоналей, а не предметъ самого предложенія.

Баскара замѣчаетъ, что, измѣняя мѣста двухъ смежныхъ боковъ четыреугольника, получается другой четыреугольникъ, въ которомъ одна изъ діагоналей отлична отъ прежней и выражается произведеніемъ гипотенузъ двухъ образующихъ треугольниковъ. Это справедливо; но Баскара не говоритъ

ничего о томъ, какія свойства этого втораго, или же перваго, четыреугольника составляли предметъ сочиненія Брамегупты. Онъ не замѣчаетъ также, что новый четыреугольникъ имѣетъ два прямые угла.

9°. Вычисленіе отрѣзковъ, образуемыхъ другъ на другѣ діагоналями, перпендикулярами и продолженными боками четыреугольника; §§ 193, 194, 195, 196, 197, 198, 200.

Предполагаются извѣстными бока, діагонали и перпендикуляры.

Всѣ эти вычисленія нетрудны; они основываются на пропорціональности сторонъ въ равноугольныхъ треугольникахъ.

Таковы предложенія о четыреугольникѣ. Вмѣстѣ съ предложеніями о треугольникѣ они составляютъ въ сочиненіи Баскары отдѣлъ, соотвѣтствующій восемнадцати первымъ параграфамъ сочиненія Брамегупты. Прежде, нежели перейдемъ къ другимъ предложеніямъ Баскары, мы укажемъ на различія существующія между его первыми предложеніями и предложѣніями Брамегупты, которыхъ они суть не болѣе какъ подражаніе.

Различія эти заключаются въ слѣдующемъ:

1°. Всѣ предложенія Баскары не имѣютъ никакого отношенія къ кругу, о которомъ прямо говорится въ §§ 26 и 27 Брамегупты и который играетъ главную роль во многихъ другихъ его предложеніяхъ.

2°. Формула площади четыреугольника (вписаннаго въ кругъ), данная Брамегуптой, объявлена у Баскары неточною.

3°. Общее выраженіе діагоналей вписаннаго четыреугольника порицается Баскарой, какъ требующее трудныхъ исчисленій и считается приложимымъ только къ четыреугольнику особаго строенія.

4°. Многихъ предложеній Брамегупты нѣтъ въ сочиненіи Баскары. Именно слѣдующихъ:

I. Выраженія діаметра круга, описаннаго около треугольника и около четыреугольника.

II. Особаго выраженія діаметра круга, описаннаго около четыреугольника съ прямоугольными діагоналями.

III. Свойства этого же четыреугольника, состоящаго въ томъ, что перпендикуляръ, опущенный изъ точки пересѣченія двухъ діагоналей на одинъ изъ боковъ, проходитъ черезъ средину противоположнаго бока.

IV. Способа построенія равнобедреннаго или косоугольнаго треугольника, въ которомъ стороны и перпендикуляръ были бы числами раціональными.

V. Способа построенія вписаннаго въ кругъ четыреугольника, въ которомъ два противопожные, или даже три бока, равны между собою и въ которомъ части, въ томъ числѣ и діаметръ круга, были бы раціональны.

Отсутствіе двухъ послѣднихъ предложеній (IV и V) въ сочиненіи Баскары доказываетъ, что геометръ этотъ не имѣлъ въ виду, какъ Брамегупта рѣшенія вопроса о построеніи вписаннаго въ кругъ четыреугольника, въ которомъ всѣ части раціональны.

Мы должны наконецъ сказать, что въ сочиненіи Баскары находится нѣсколько предложеній о прямоугольномъ треугольникѣ, которыхъ нѣтъ въ сочиненіи Брамегупты, потому что они были бы чужды той теоріи, которая составляетъ предметъ этого сочиненія.

Соображая все сказанное, заключаемъ, что въ сочиненіи Брамегупты во всей полнотѣ и весьма точно рѣшался вопросъ о построеніи вписаннаго въ кругъ четыреугольника, всѣ части котораго раціональны. Ни одно предложеніе въ немъ не чуждо этому вопросу и не безполезно для его рѣшенія.

Сочиненіе же Баскары не имѣетъ содержаніемъ одного опредѣленнаго предмета. Въ немъ можно различить три главныя части, независимыя одна отъ другой.

Въ первой части даются: выраженіе перпендикуляра въ треугольникѣ и формула для вычисленія площади этой фигуры въ функціи трехъ сторонъ.

Во второй—разсматривается построеніе прямоугольнаго треугольника въ раціональныхъ числахъ и нѣкоторые другіе вопросы о прямоугольномъ треугольникѣ.

Въ третьей части авторъ вычисляетъ различныя линіи въ какомъ нибудь четыреугольникѣ по даннымъ четыремъ сторонамъ и одной діагонали.

Такимъ образомъ между этими двумя сочиненіями есть много рѣзкихъ различій. Но, не смотря на это, мы должны признать, что позднѣйшее сочиненіе есть только подражаніе или копія съ болѣе древняго; копія несовершенная и искаженная, показывающая несомнѣнно, что Баскара не понималъ сочиненія Брамегупты.

Примѣчанія различныхъ толкователей, сопровождающія текстъ Лилавати, доказываютъ, что писатели эти не были счастливѣе Баскары и не понимали также предложеній Брамегупты.

Впрочемъ предложенія главы VI Лилавати, о которыхъ намъ остается упомянуть, имѣютъ болѣе значенія, чѣмъ тѣ, которыя имъ соотвѣтствуютъ въ трактатѣ Брамегупты. Мы изложимъ важнѣйшія изъ нихъ и обратимъ особое вниманіе на весьма приближенное отношеніе окружности къ діаметру и на очень простую формулу для приблизительнаго вычисленія хорды въ функціи соотвѣтствующей дуги.

«§ 201. Если D будетъ діаметръ круга, то выраженіе $D.$ «$\frac{3927}{1250}$ почти представляетъ окружность; $D.\ \frac{22}{7}$ есть приб«лиженіе, употребляемое въ практикѣ.»

Этихъ двухъ выраженій нѣтъ въ сочиненіи Брамегупты. Дробь $\frac{22}{7}$ есть отношеніе Архимеда. Первая дробь $\frac{3927}{1250}$ еще точнѣе; она равна 3,14160, тогда какъ $\frac{22}{7} = 3,1428571.....$ Чтобы имѣть болѣе близкую величину, нужно употреблять отношеніе 3,1415926.....

Приближеніе Индѣйцевъ [84]) особенно замѣчательно неболь-

[84]) Отношеніе $\frac{3927}{1250}$ не слѣдуетъ приписывать Баскарѣ; оно относится къ гораздо болѣе древнему времени. Его находимъ въ видѣ дроби $\frac{62832}{20000}$

шимъ числомъ цифръ. Впрочемъ отношеніе Адріана Меція, $\frac{355}{113} = 3{,}14159292\ldots\ldots$, предпочтительнѣе.

«§ 203. *Правило.* Четверть діаметра, умноженная на ок-«ружность, есть площадь круга. Эта площадь, помноженная «на 4, есть поверхность сферы. Эта поверхность, умножен-«ная на діаметръ и раздѣленная на 6, есть точная величи-«на объема сферы.

§§ 205—206. *Правило.* Пусть D будетъ діаметръ круга; «$D^2.\frac{3927}{5000}$ есть довольно приближенная величина площади «круга; $D^2.\frac{11}{14}$ есть грубая мѣра, употребляемая въ прак-«тикѣ; $\frac{D^3}{2}+\frac{1}{21}.\frac{D^3}{2}$ есть мѣра объема сферы.»

Два послѣднія выраженія получаются изъ Архимедова отношенія; именно

$$D^2.\frac{11}{14}=\frac{D^2}{4}.\frac{22}{7} \text{ и } \frac{D^3}{2}+\frac{1}{21}.\frac{D^3}{2}=\frac{D^3}{6}.\frac{22}{7}.$$

§§ 206—207. Это тѣже соотношенія между хордой, стрѣлкой и діаметромъ круга, которыя даны были Брамегуптой въ §§ 41 и 42.

въ алгебрѣ Могаммеда Бенъ Муза, который, показавъ два отношенія $\frac{22}{7}$ и $\sqrt{10}$, говоритъ, что астрономы употребляютъ третье отношеніе именно $\frac{62832}{20000}$. (См. стр. 71 перевода Розена.)

Вслѣдствіе этого рождается вопросъ, принадлежитъ ли это отношеніе Индѣйцамъ или Арабамъ. Розенъ и Либри думаютъ, что оно происхожденія индѣйскаго. (См. *Mohammed ben Musa, Algebra, translated by F. Rosen*, p. 199; и *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, p. 128). Отношеніе это извѣстно въ Европѣ уже очень давно. Пурбахъ говоритъ о немъ въ своемъ сочиненіи о построеніи синусовъ и Стевинъ— въ своей географіи.

§§ 209—211 и 212. «Діаметръ круга равенъ 2000; стороны вписаннаго равносторонняго треугольника и другихъ «правильныхъ многоугольниковъ будутъ: для треугольника «$1732\frac{1}{20}$ для тетрагона $1414\frac{13}{60}$; для пятиугольника 1175 «$\frac{17}{30}$; для шестиугольника 1000; для семиугольника $867\frac{7}{12}$; «для восьмиугольника $765\frac{11}{30}$ и для девятиугольника $683\frac{17}{20}$.»

Авторъ прибавляетъ: «Для разныхъ другихъ діаметровъ по«лучатся другія стороны, какъ мы покажемъ это въ трак«татѣ *sphaerica*, въ отдѣлѣ *о построеніи синусовъ*.»

«Слѣдующее правило доставляетъ весьма удобный способъ «находить хорды съ грубымъ приближеніемъ.»

§ 213. Пусть будетъ c окружность, a дуга, D діаметръ и C хорда; будемъ имѣть:

$$C=\frac{4D.a(c-a)}{\frac{5}{4}c^2-a(c-a)}.$$

Эта приблизительная формула весьма любопытна; было бы интересно знать, какимъ образомъ Индѣйцы пришли къ ней. Сервуа получимъ ее изъ формулы, опредѣляющей синусъ въ функціи дуги при помощи ряда. (См. *Correspondance sur l'école Polytechnique*, t. III, тетрадь 3-я.)

§ 214. *Примѣръ*. Если діаметръ равенъ 240, то хорды дугъ въ 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160 и 180 градусовъ будутъ равны 42, 82, 120, 154, 184, 208, 226, 236 и 240.

§ 215. Формула, опредѣляющая дугу a въ функціи хорды C для окружности c и діаметра D:

$$a=\frac{c}{2}-\sqrt{\frac{c^2}{4}-\frac{\frac{5}{4}c^2C}{4D+C}}.$$

Эту формулу получимъ изъ формулы § 213, рѣшая буквенное уравненіе второй степени.

Главы VII, VIII, IX и X не содержатъ ничего новаго сравнительно съ соотвѣтствующими главами сочиненія Брамегупты.

Глава XI имѣетъ предметомъ вычисленіе разстояній посредствомъ тѣни гномона. Здѣсь находимъ вопросы, изслѣдованные Брамегуптой и, кромѣ того, слѣдующій вопросъ: гномонъ освѣщенъ двумя разными свѣтящими точками; если извѣстны разность тѣней и разность ихъ гипотенузъ, то можно опредѣлить и самыя тѣни.

Это приводится къ слѣдующей задачѣ:

Построить треугольникъ, зная его перпендикуляръ, разность отрѣзковъ, образуемыхъ перпендикуляромъ на основаніи, и разность двухъ другихъ сторонъ.

Пусть h будетъ высота, или перпендикуляръ треугольника, δ разность отрѣзковъ и d разность сторонъ; отрѣзки будутъ равны

$$\frac{1}{2}\left(\delta \pm d\sqrt{1+\frac{4h^2}{d^2-\delta^2}}\right).$$

Это и есть формула Баскары.

Въ Виджа-Ганита есть нѣсколько геометрическихъ вопросовъ, рѣшенныхъ посредствомъ вычисленія, и нѣсколько правилъ алгебры, доказанныхъ при помощи геометріи. Всѣ эти вопросы изслѣдованы съ замѣчательнымъ изяществомъ и точностью.

Въ нѣкоторыхъ вопросахъ, которые могли быть рѣшены различнымъ образомъ, авторомъ избранъ самый простой способъ рѣшенія; можно подумать, что читаешь какое нибудь мѣсто изъ *Arithmetica universalis*, гдѣ Ньютонъ даетъ столь основательные совѣты относительно выбора неизвѣстныхъ.

Такъ напримѣръ, желая опредѣлить основаніе косоугольнаго треугольника, стороны котораго равны 13 и 5 и площадь равна 4, Баскара замѣчаетъ, что «если за неизвѣст-«ное примемъ искомое основаніе, то придемъ къ квадрат-«ному уравненію. Но, если будемъ искать перпендикуляръ,

«опущенный на одну изъ данныхъ сторонъ изъ противопо-«ложной вершины, и отрѣзки, образуемые на этой сторонѣ, «то получимъ искомое основаніе чрезъ простое извлеченіе «квадратнаго корня. Искомое основаніе равно 4.» (Виджа-Ганита, § 117.)

Баскара предлагаетъ два доказательства теоремы о квадратѣ гипотенузы. Первое состоитъ въ выраженіи, при помощи пропорцій, отрѣзковъ, образуемыхъ на гипотенузѣ перпендикуляромъ, и въ сложеніи послѣ того этихъ двухъ отрѣзковъ. Это доказательство было употреблено Валлисомъ. (*De sectionibus anglularibus*, cap. VI.)

Второе имѣетъ чисто индѣйское происхожденіе и весьма замѣчательно. На сторонахъ квадрата Баскара строитъ внутри четыре равные между собою прямоугольные треугольника, имѣющіе стороны квадрата гипотенузами, и говоритъ: *гляди* (*see*, *voyez*). Дѣйствительно, одного взгляда на фигуру достаточно, чтобы замѣтить, что площадь квадрата равна площадямъ четырехъ треугольниковъ (или учетверенной площади одного изъ нихъ), сложеннымъ съ площадью маленькаго квадрата, сторона котораго есть разность катетовъ этихъ четырехъ треугольниковъ. Другими словами, называя черезъ c гипотенузу одного изъ треугольниковъ и черезъ a, b двѣ другія стороны его, имѣемъ

$$c^2 = 4\frac{ab}{2} + (a-b)^2 = 2ab + (a-b)^2, \text{ или } c^2 = a^2 + b^2,$$

что и составляетъ доказываемое предложеніе. (Виджа-Ганита, § 146).

Формулы анализа

$$2ab + (a-b)^2 = a^2 + b^2$$
$$(a+b)^2 - (a^2+b^2) = 2ab,$$
$$(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$$

доказываются наглядными и понятными чертежами, не требующими никакого поясненія. (§§ 147, 149 и 150).

Чтобы рѣшить въ раціональныхъ числахъ неопредѣленное уравненіе второй степени

$$ax+by+c=xy,$$

Баскара показываетъ помощію чертежа, представляющаго геометрическое значеніе этого уравненія, что оно можетъ быть приведено къ виду

$$(x-b)(y-a)=ab+c.$$

Отсюда онъ заключаетъ, что для раціональныхъ величинъ x и y должно взять выраженія

$$x=b+n, \qquad y=a+\frac{ab+c}{n},$$

гдѣ n есть число произвольное.

Баскара называетъ это доказательство *геометрическимъ*. Потомъ онъ даетъ другое, чисто *алгебраическое*. (§§ 212—214.)

Многіе геометрическіе вопросы рѣшены въ Виджа-Ганита, какъ приложенія правилъ алгебры. Таковы два слѣдующіе: «Найти (въ раціональныхъ числахъ) стороны пря«моугольнаго треугольника, площадь котораго выражалась «бы тѣмъ же числомъ, какъ и гипотенуза; или, также, рав«нялась бы произведенію трехъ сторонъ.» (§ 120.)

Въ первомъ случаѣ стороны треугольника будутъ: $\frac{20}{6}$, $\frac{15}{6}$ и $\frac{25}{6}$, а во второмъ: $\frac{4}{10}$, $\frac{3}{10}$ и $\frac{5}{10}$. Баскара прибавляетъ, что можно найти другія рѣшенія [85]).

Всѣ эти подробности показываютъ, что Индѣйцы, по крайней мѣрѣ во времена Баскары, прилагали алгебру къ гео-

[85]) Эти двѣ задачи зависятъ отъ двухъ слѣдующихъ уравненій:

$$x^2y^2=4(x^2+y^2),$$

$$x^2+y^2=\frac{1}{4}.$$

метріи и геометрію къ алгебрѣ. Мы не находимъ слѣдовъ такого же тѣснаго сліянія этихъ двухъ наукъ въ сочиненіи Брамегупты. Вѣроятно это потому, что его изложеніе гораздо болѣе сжато, нежели у Баскары; у него гораздо менѣе примѣровъ на алгебраическія правила и никогда не дается никакихъ доказательствъ. Но мы должны думать, что приложеніе алгебры къ геометріи, сообщающее особый характеръ сочиненію Баскары, началось гораздо ранѣе временъ этого писателя; тѣмъ болѣе, что оно же составляетъ характеръ арабскихъ сочиненій, написанныхъ за нѣскокько столѣтій до Баскары, напримѣръ во время Могаммеда Бенъ Муза (въ IX вѣкѣ). Только у Индѣйцевъ могли почерпнуть Арабы этотъ математическій пріемъ, никогда не употреблявшійся у Грековъ.

Мы отбросили мысль о томъ, что индѣйскія сочиненія могутъ представлять собою элементы геометріи, подобно ихъ трактатамъ ариѳметики и алгебры. Мы, кажется, ясно доказали, что въ этомъ не могъ состоять предметъ сочиненія Брамегупты, въ которомъ идетъ рѣчь только объ одномъ геометрическомъ вопросѣ. Но этого нельзя сказать въ такой же мѣрѣ о сочиненіи Баскары; и мы согласны видѣть въ этомъ сочиненіи сводъ геометрическихъ познаній, существовавшихъ въ позднѣйшія времена въ индѣйскомъ народѣ. Искаженный видъ, въ которомъ этотъ авторъ перенесъ изслѣдованія Брамегупты въ свое сочиненіе, и примѣчанія разныхъ толкователей, изъ которыхъ ни одинъ не упрекнулъ его въ этомъ, показываютъ намъ, что въ то время науки въ Индіи замѣтно клонились къ упадку и что у нихъ уже не было дѣйствительно хорошаго сочиненія по геометріи.

Мы не можемъ выразиться также опредѣленно о состояніи науки во времена Брамегупты. Для этого не достаетъ документовъ; мы не можемъ сказать, стояли ли дѣйствительно познанія и математическія способности этого писателя и его современниковъ на высотѣ тѣхъ превосходныхъ и замѣчательныхъ сочиненій, которыя отъ него дошли до насъ; или же самыя эти сочиненія, подобно послѣдующимъ, были толь-

ко остатками истиннаго, по весьма древняго, знанія, остатками, уцѣлѣвшими отъ разрушительнаго дѣйствія времени и не потерявшими еще во времена Брамегупты своихъ достоинствъ и своей первоначальной чистоты. Знаменитый голландскій ученый Стевинъ допускалъ *мудрый вѣкъ*, «когда «люди обладали удивительными свѣдѣніями въ наукахъ,» вѣкъ, предшествовавшій, по его мнѣнію, временамъ Грековъ, которые получили отъ него только небольшую часть древнѣйшихъ познаній [86]); поэтому Стевинъ и знаменитый Бальи (Bailly) [87]) не задумались бы высказать положительное мнѣніе относительно столь замѣчательныхъ сочиненій Брамегупты.

Мы не будемъ касаться здѣсь этого важнаго историческаго вопроса и ограничимся тѣмъ, что обратимъ на геометрическій отдѣлъ сочиненій Брамегупта и Баскары, которымъ до сихъ поръ пренебрегали, вниманіе оріенталистовъ и вообще ученыхъ, интересующихся исторіею Индіи и развитіемъ цивилизаціи въ человѣчествѣ. Этотъ геометрическій отдѣлъ могъ бы доставить имъ нѣсколько полезныхъ документовъ и указаній.

О геометріи Римлянъ.

Можно сказать, что мы продолжали бы изложеніе того же предмета, еслибы отъ геометріи Индѣйцевъ перешли къ геометріи Арабовъ. Но какъ мы увидимъ, геометрія Арабовъ еще болѣе естественнымъ образомъ связывается съ первыми трудами европейскихъ геометровъ въ эпоху воз-

---

[86]) *Oeuvres mathématiques de Simon Stevin*; in fol. Leyde, 1634. *Géographie;* définition III. p. 106.

[87]) «Эти научные методы, употребляемые невѣждами, эти философскія «идеи и системы въ головахъ вовсе не философскихъ, все это доказы-«ваетъ на существованіе народа, предшествовавшаго Индѣйцамъ и Хал-«деямъ:—народа, который обладалъ науками въ значительной степени «совершенства, имѣлъ высшую и мудрую философію и который, исчез-«нувъ съ лица земли, оставилъ послѣдующимъ народамъ нѣсколько от-«рывочныхъ истинъ, сохранившихся отъ забвенія и случайно дошедшихъ «до насъ.» (*Histoire de l'astronomie ancienne,* livre III, § XVIII.)

рожденія наукъ, въ которую арабскій элементъ былъ распространенъ и имѣлъ вліянія не менѣе, чѣмъ элементъ греческій; поэтому мы теперь сдѣлаемъ краткое отступленіе и скажемъ нѣсколько словъ о геометріи у Римлянъ.

Математическія науки были въ крайнемъ пренебреженіи у римскаго народа, гдѣ высшіе умы посвящали себя только военному искуству и краснорѣчію. Геометрія въ особенности была едва извѣстна въ Римѣ. Астрономія пользовалась большимъ почетомъ, и можно назвать нѣсколькихъ знаменитыхъ писателей, именно: Варрона, Юлія Цезаря, Цицерона, Лукреція, Виргилія, Горація, Сенеку, Плинія, которые имѣли свѣдѣнія о небесныхъ явленіяхъ. Но ни одинъ изъ нихъ не находилъ въ этихъ явленіяхъ предмета для научныхъ изысканій и не сдѣлалъ ни одного шага въ наукѣ. Указываютъ только на Сульпиція Галла, который занимался практической астрономіей и предсказывалъ затмѣнія.

Геометрія у Римлянъ назначалась, кажется, только для измѣренія земли и для опредѣленія границъ: ихъ землемѣры, называвшіеся *agrimensores* или *gromatici*, были люди весьма важные и на нихъ смотрѣли, какъ на представителей науки. Но нѣкоторые, дошедшіе до насъ, отрывки изъ ихъ сочиненій заставляютъ насъ рѣшительно отказать имъ въ званіи геометровъ. Потому что сочиненія эти не только относятся къ самымъ элементарнымъ вопросамъ практической геометріи, но въ нихъ кромѣ того встрѣчаются грубыя ошибки. Площади треугольника и четыреугольника вычисляются неправильно. Мы привели уже ихъ правила, когда говорили о § 21 геометрическаго отдѣла сочиненій Брамегупты.

Не смотря на уваженіе, которымъ пользовались *gromatici* въ Римѣ, благодаря заслугамъ, оказаннымъ ими въ различныхъ частяхъ обширнаго римскаго государства, и не смотря на то, что имена важнѣйшихъ изъ нихъ переданы намъ Боэціемъ, въ настоящее время всѣ они почти совсѣмъ не упоминаются въ исторіи геометріи.

Впрочемъ нѣкорые изъ людей, сдѣлавшихся знаменитыми на другомъ поприщѣ, занимались также и науками. Варронъ, который считался самымъ ученымъ изъ Римлянъ и на котораго смотрѣли какъ на втораго Платона, писалъ объ ариѳметикѣ, геометріи астрономіи, музыкѣ и мореплаваніи. Жаль, что ни одно изъ его сочиненій не дошло до насъ. Объ этомъ писателѣ слѣдуетъ упомянуть въ особенности, потому что онъ подозрѣвалъ сжатіе земли, какъ это видно изъ одного мѣста у Кассіодора.

Архитектира Витрувія доказываетъ, что это былъ одинъ изъ людей своего времени, имѣвшій наиболѣе математическихъ свѣдѣній.

Можно еще упомянуть о Юліѣ Секстѣ Фронтинѣ, который, какъ искусный инженеръ, писалъ о водопроводахъ. До насъ дошла его книга, подъ заглавіемъ: *De aquaeductibus urbis Romae*. Есть еще другое извѣстное сочиненіе его о военномъ искуствѣ. [88]).

Можно предполагать, что Фронтинъ писалъ также о геометріи, и ему можно приписать трактатъ о измѣреніи поверхностей, находящійся въ рукописи одиннадцатаго вѣка между многими сочиненіями Боэція вмѣстѣ съ другими отрывками изъ римскихъ *gromatici*. [89]).

---

[88]) *Stratagematum libri quatuor.*

[89]) Рукопись эта, въ большой листъ на пергаментѣ, принадлежитъ библіотекѣ города Шартра. Dr. G. Haenel записалъ ее въ *Catalogi librorum manuscriptorum*, etc. (Lipsiae, 1819, in 4⁰) подъ слѣдующимъ заглавіемъ: *Aristotelis lib. elenchorum*; *Boetii Logica*, *Rhetorica*, *Arithmetica*, *Musica; Julii Firmici mathematica; Materni Junioris geometria; canones*, *tabulae et diversa de astronomia.*

Заглавіе это заимствовано изъ приписки, сдѣланной на нижней сторонѣ деревяннаго переплета книги; вѣроятно эта приписка также стара, какъ и самый переплетъ; вотъ она:

In hoc volumine continentur:
Liber elenchorum Aristotelis;
Logica, *Rethorica, Arithmetica*, *Musica*, *Boecii*
Mathematica Julii Firmici, *Materni Junioris;*
Geometria;
Canones, *tabulae et alia de Astronomia.*

Мнѣніе наше основывается на двухъ соображеніяхъ. Во первыхъ, Боэцій въ началѣ второй книги своей геометріи, гдѣ говорится объ измѣреніи поверхностей, называетъ Юлія Фронтина какъ ученаго весьма искуснаго въ этомъ дѣлѣ и заявляетъ, что онъ многое у него заимствовалъ для своей второй книги. Въ концѣ сочиненія Боэцій даетъ списокъ главнѣйшихъ римскихъ землемѣровъ и помѣщаетъ между ними Юлія Фронтина. Эти два обстоятельства доказываютъ, что этотъ авторъ писалъ о практической геометріи. Во вторыхъ, отрывокъ по геометріи, находящійся въ вышеупо-

---

Противъ словъ *Mathematica Julii* и проч. находится отмѣтка, вѣроятно также весьма древняя, которую, по нашему мнѣнію, можно прочесть такъ: *Hanc suppositam credo.* И дѣйствительно, мы не находимъ никакого сочиненія Юлія Фирмика Матерна. Правда, что въ этой рукописи не достаетъ, къ сожалѣнію, 104 листовъ (140—243), начиная съ 20 главы второй книги трактата Боэція о музыкѣ. Можно предполагать, что остальная часть этого трактата могла занимать около 64 листовъ; такъ что на 40 листахъ могли находиться различныя неизвѣстныя сочиненія и въ томъ числѣ сочиненія Фирмика Матерна; впрочемъ этотъ писатель почти совсѣмъ неизвѣстенъ и о немъ упоминаютъ иногда только по поводу его трактата объ астрологіи въ восьми книгахъ.

Первый листъ, слѣдующій за утраченными, именно листъ 244, содержитъ окончаніе сочиненія о правильныхъ тѣлахъ. Затѣмъ находятся тамъ различные отрывки, помѣщенные одни вслѣдъ за другими, безъ заглавій и безъ именъ авторовъ, относящіеся большею частію къ геометріи римскихъ землемѣровъ и къ употреблявшимся въ то время мѣрамъ. Въ этой смѣси мы различили слѣдующіе отрывки, изъ которыхъ два послѣдніе дѣлаютъ рукопись въ особенности драгоцѣнною:

1° Отрывокъ, приписываемый нами Фронтину;

2° Книга Марціана Капеллы объ ариѳметикѣ;

3° Пятая книга сочиненія Колумеллы: *De re rustica*, въ которой говорится объ измѣреніи полей;

4° Разные другіе отрывки изъ геометріи римскихъ землемѣровъ;

5° Мѣсто изъ 15-й главы *Etymologiae* Исидора Севильскаго, гдѣ говорится о мѣрахъ;

6° Двѣ книги геометріи Боэція; въ первой находимъ девять цифръ и мѣсто о новой системѣ счисленія; вторая книга оканчивается также словами объ этомъ счисленіи, которыхъ нѣтъ въ другихъ извѣстныхъ изданіяхъ Боэція;

мянутой рукописи, представляетъ такое сходство со второю книгою Боэція, что, несомнѣнно, одно изъ этихъ сочиненій должно быть списано съ другаго. Ясное и болѣе легкое изложеніе въ отрывкѣ по геометріи доказываетъ, что онъ былъ написанъ ранѣе сочиненія Боэція; отсюда естественно приходимъ къ заключенію, что это есть то сочиненіе Фронтина, которымъ пользовался, по его собственнымъ словамъ, Боэцій.

Этотъ отрывокъ по геометріи дѣлаетъ честь своему автору и болѣе достоинъ носить имя Фронтина нежели приписываемый ему трактатъ *De qualitate agrorum*. По нашему мнѣнію это есть самое лучшее сочиненіе, вышедшее изъ подъ пера римскихъ геометровъ, не исключая даже второй книги геометріи Боэція. Въ этомъ отрывкѣ мы находимъ формулу для выраженія площади треугольника по тремъ сторонамъ; и кромѣ того въ немъ нѣтъ того невѣрнаго правила, которое употребляли римскіе землемѣры для измѣренія площади четыреугольника [90]) и которое воспроизведено даже у Боэція.

Судя по сходству во многихъ отношеніяхъ, должно думать, что въ эпоху возрожденія это сочиненіе послужило матеріаломъ для геометрической части энциклопедіи, поя-

---

7° Наконецъ другое сочиненіе объ употребленіи девяти цифръ, представляющее замѣчательное сходство съ одной стороны съ словами Боэція и письмомъ Герберта, а съ другой стороны съ нашею современною системою счисленія.

Сочиненіе это, до сихъ поръ остававшееся неизвѣстнымъ, можетъ бросить нѣкоторый свѣтъ на нерѣшенный еще вопросъ объ истинномъ значеніи отрывковъ изъ Боэція и Герберта и на опредѣленіе съ большею точностью той эпохи, когда введена была въ Европѣ индѣйская нумерація.

Рукопись оканчивается изложеніемъ нѣкоторыхъ понятій о небесной сферѣ, потомъ трактатомъ объ астрологіи и астрономическими таблицами.

[90]) См. стр. 313 сборника: *Rei agrariae auctores legesque variae; cura Wilelmi Goesii, cujus accedunt indices, antiquitates agrariae et notae, una cum N. Rigaltii notis et observationibus.* Amst. 1674, in 4°; и стр. 172 сочиненія Колумеллы *De re rustica libri XII.* Paris 1543 in 8°.

вившейся въ 1486 году и имѣвшей послѣ того множество изданій подъ заглавіемъ *Margarita philosophica.* Независимо отъ этого обстоятельства, придающаго особую цѣну этому отрывку въ нашихъ глазахъ, его слѣдовало бы напечатать уже потому, что это есть лучшее сочиненіе по геометріи, дошедшее до насъ отъ Римлянъ.

Впрочемъ слѣдуетъ замѣтить, что въ этомъ отрывкѣ при вычисленіи площади правильныхъ многоугольниковъ въ функціи сторонъ встрѣчается ошибка, повторенная также Боэціемъ и воспроизведенная еще въ концѣ XV вѣка въ *Margarita philosophica.*

Авторъ употребляетъ именно слѣдующую формулу:

Если a будетъ сторона правильнаго многоугольника и n число сторонъ, то площадь выражается такъ:

$$\frac{(n-2)a^2-(n-4)a}{2}.$$ [91]

Нелѣпость этой формулы очевидна: она, во первыхъ, не однородна; во вторыхъ, изъ нея выходитъ, что при помощи *уравненія второй степени* можно найти сторону всякаго правильнаго многоугольника, вписаннаго въ кругъ, въ функціи радіуса и, обратно,—радіусъ въ функціи стороны. Но вопросы эти зависятъ, какъ извѣстно, отъ уравненій высшихъ степеней.

---

[91]) Формула эта проистекаетъ изъ правилъ, данныхъ авторомъ для правильныхъ многоугольниковъ въ 7, 8, 9, 10, 11 и 12 сторонъ; но для треугольника, пятиугольника и шестиугольника онъ употребляетъ слѣдующія формулы:

для треугольника: $\frac{a^2+a}{2}$,

для пятиугольника: $\frac{3a^2+a}{2}$,

для шестиугольника: $\frac{4a^2+a}{2}$.

Прибавленіе. Формула

$$\frac{(n-2)a^2-(n-4)a}{2},$$

которую римскіе землемѣры употребляли для вычисленія площади правильнаго многоугольника, имѣющаго n сторонъ, выражаетъ собою многоугольныя числа порядка $(n-2)$.

Эти многоугольныя числа были хорошо извѣстны древнимъ; ихъ встрѣчаемъ въ сочиненіяхъ Никомаха, Ямблика, Теона, Діофанта и въ ариѳметикѣ Боэція, гдѣ имъ посвящено много мѣста. Отсюда получила происхожденіе и эта формула, употреблявшаяся римскими писателями и которую они должны были разсматривать только какъ приблизительную. Впрочемъ приближеніе здѣсь весьма грубо и не основывается ни на какихъ геометрическихъ соображеніяхъ.

Мы увидимъ, что Гербертъ убѣдился вь невѣрностм этой формулы для треугольника и старался доказать ее, какъ формулу приближенную; но изъ его разсужденій проистекаетъ другое выраженіе, именно:

$$\frac{a^2+a}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2},$$

которое дѣйствительно есть приближенная формула; приближеніе здѣсь будетъ тѣмъ болѣе, чѣмъ менѣе линейная единица, принятая для выраженія стороны a.

Можетъ быть все это мѣсто о измѣреніи правильныхъ многоугольниковъ было введено въ отрывокъ по геометріи, приписываемый нами Фронтину, какимъ нибудь позднѣйшимъ писателемъ, потому что правило это въ примѣненіи къ равностороннему треугольнику противорѣчитъ другому строгому геометрическому правилу, помѣщенному раньше. Такъ, въ главѣ подъ заглавіемъ *de trigono isopleuro* читаемъ: «если a есть сторона равносторонняго треугольника, то «$a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$ есть квадратъ перпендикуляра; перпендикуляръ «же, помноженный на $\frac{a}{2}$ есть площадь треугольника. При «$a=30$, имѣемъ:

$$(30)^2-\left(\frac{30}{2}\right)^2=675=(26)^2;\ \text{и}\ 26+\frac{30}{2}=390.$$

«Это будетъ площадь треугольника.» Правило это вполнѣ точно, также какъ и числовое приложеніе, если только будемъ пренебрегать дробями при извлеченіи корня изъ 675. [92]) Поэтому нельзя не удивляться, встрѣчая послѣ этого, подъ тѣмъ же заглавіемъ *de trigono isopleuro* слѣдующее другое правило: «если a есть сторона равносторонняго треуголь-

«ника, то площадь его будетъ $\frac{a^2+a}{2}$. При $a=28$, площадь

«будетъ: $\frac{(28)^2+28}{2}$, или $\frac{812}{2}=406$.»

Замѣтимъ, что для треугольника со стороною 28 получается площадь больше, чѣмъ для треугольника со стороною 30. Это противорѣчіе между двумя числовыми примѣрами доказываетъ, кажется, что второе правило не принадлежитъ автору, а было взято изъ какого нибудь другаго сочиненія.

Второе правило сопровождается доказательствомъ, которое само требовало бы подтвержденія. Вотъ какъ разсуждаетъ авторъ. Данная площадь S представляетъ площадь нѣкотораго равносторонняго треугольника, сторона котораго есть $\frac{\sqrt{8S+1}-1}{2}$. Вставляя вмѣсто S найденную пло-

---

[92]) Положить $\sqrt{675}=26$ значитъ тоже, что $15.\sqrt{3}=26$, или $\sqrt{3}=\frac{26}{15}$. Поэтому точное выраженіе площади треугольника $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ обращается въ

$$\frac{a^2}{4}\cdot\frac{26}{15}=a^2\frac{13}{30}.$$

Эту формулу употребляли нѣкоторые латинскіе писатели, напр. Колумелла (*De re rustica;* lib. V, cap. 2); она употреблялась и въ новѣйшія времена: ее встрѣчаемъ во многихъ сочиненіяхъ по практической геометріи (См. *Georgii Vallae, de expetendis et fugiendis rebus;* lib. XIV et *Geometriäe* lib V, cap. IV.—*Il breve trattato di Geometria del sig. Gio. Franc. Peverone di Cuneo*; in Lione, 1556, in 4⁰.—Livre III de la *Geometrie pratique* de Henrion; p. 341 et 349; 2-e édition, Paris, 1623).

щадь $\frac{a^2+a}{2}$, получимъ сторону предположеннаго треугольника a; слѣдовательно найденная площадь вѣрна.

Негодность этого воображаемаго доказательства очевидна, потому что формула

$$\text{сторона}=\frac{\sqrt{8.\ \textit{площадь}+1}-1}{2}$$

представляетъ, въ иной формѣ, то же самое, что равенство: площадь$=\frac{a^2+a}{2}$, которое требуется доказать.

Но, чтобъ перейти отъ одной изъ этихъ двухъ формулъ къ другой, *необходимо рѣшить буквенное уравненіе второй степени*. Это обстоятельство въ геометріи Римлянь заслуживаетъ вниманія.

Такъ какъ разсматриваемый нами отрывокъ представляетъ лучшее и полнѣйшее сочиненіе римскихъ писателей по геометріи и заключаетъ, какъ кажется, въ себѣ все, что было имъ извѣстно, то мы перечислимъ здѣсь всѣ вопросы, о которыхъ говорится въ этомъ отрывкѣ.

1-е Вычисленіе перпендикуляра въ треугольникѣ по даннымъ сторонамъ [93]).

2-е. Вычисленіе площади треугольника помощію этого перпендикуляра и формула площади въ функціи трехъ сторонъ.

3-е. Двѣ формулы для построенія прямоугольнаго треугольника въ цѣлыхъ числахъ, когда одна сторона есть данное четное или нечетное число; именно: для нечетнаго числа.

$$\left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2+a^2;$$

---

[93]) Авторъ беретъ для сторонъ треугольника три числа 13, 14 и 15, которыя употреблялъ Геронъ Александрійскій въ своемъ трактатѣ о геодезіи и которыя встрѣчаются также въ геометріи Индѣйцевъ. (См. выше разборъ сочиненія Брамегупты.)

Для четнаго числа

$$\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2+1\right]^2=\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2-1\right]^2+a^2.$$

4-е. Выраженіе діаметра круга, вписаннаго въ прямоугольный треугольникъ; діаметръ этотъ равенъ суммѣ категовъ безъ гипотенузы.

5-е. Вычисленіе площади квадрата, параллелограмма, ромба и четыреугольника съ параллельными основаніями.

Авторъ называетъ одну изъ сторонъ четыреугольника *основаніемъ*, а противоположную сторону *вершиною* или *теменемъ* (*vertex seu coraustus*). Слово *coraustus* не встрѣчается теперь ни въ одномъ лексиконѣ; у новыхъ геометровъ оно употреблено, кажется, только въ *Margarita philosophica*.

6-е. Вычисленіе площадей правильныхъ многоугольникевъ (основанное на ложномъ правилѣ).

7-е. Отношеніе окружности къ діаметру: $\frac{44}{14}$, или $\frac{22}{7}$.

8-е. Наконецъ поверхность сферы, равная площади четырехъ большихъ круговъ.

Въ исторіи наукъ у Римлянъ такъ мало именъ, что приходится упоминать о писателяхъ, оставившихъ слѣды самыхъ незначительныхъ познаній въ геометріи и даже нисколько не способствовавшихъ развитію этой науки. Такимъ образомъ намъ придется упомянуть о Марціанѣ Капеллѣ, Св. Августинѣ, Макробіѣ, Боэціѣ, Кассіодорѣ и Исидорѣ Севильскомъ. Историки не согласны относительно времени, когда жилъ первый изъ этихъ ученыхъ: одни относятъ его къ III, а другіе къ V вѣку; отъ него намъ осталось сочиненіе въ девяти книгахъ [94]); двѣ первыя книги, составляющія какъ бы введеніе къ семи остальнымъ, заключаютъ

---

[94]) *Martiani Minei felicis Capellae, Carthaginiensis, viri proconsularis, Satyricon, in quo de Nuptiis Philologiae et Mercurii libri duo et de septem artibus liberalibus libri singulares*, etc.

въ себѣ небольшой философскій и аллегорическій романъ, подъ заглавіемъ: *Бракосочетаніе философіи съ Меркуріемъ*; семь остальныхъ книгъ посвящены семи свободнымъ искусствомъ: грамматикѣ, діалектикѣ, реторикѣ, геометріи, ариѳметикѣ, астрономіи [95]) и музыкѣ.

Въ своей книгѣ о *геометріи* авторъ употребляетъ, кажется, это слово въ буквальномъ этимологическимъ смыслѣ, потому что онъ начинаетъ съ понятій о географіи. Все, относящееся собственно къ геометріи, приводится къ опредѣленіямъ нѣкоторыхъ линій, площадей и тѣлъ, заимствованнымъ большею частію у Евклида и изложеннымъ подъ греческими названіями. Это довольно замѣчательно, такъ какъ во всѣхъ другихъ сочиненіяхъ того же, или немного позднѣйшаго, времени, напримѣръ у Боэція и Кассіодора, греческія названія замѣнены латинскими.

Книга Марціана Капеллы объ ариѳметикѣ отличается болѣе ученымъ характеромъ, нежели его геометрія. Подобно ариѳметикѣ Боэція, она представляетъ подражаніе сочиненіямъ платоновой и пиѳагоровой школы, преимущественно сочиненію Никомаха, въ которомъ разсматриваются свойство чиселъ и раздѣленіе ихъ на разныя категоріи: на числа четныя и нечетныя, сложныя, совершенныя и несовершенныя, излишнія, недостаточныя, плоскія, тѣлесныя, треугольныя и т. п. (*numeri pares*, *impares*, *compositi*, *perfecti*, *imperfecti*, *abundantes*, *deficientes*, *plani*, *solidi*, *triangulares* etc.).

Св. Августинъ писалъ о музыкѣ. Ему же приписываютъ, довольно неосновательно, начала ариѳметики и геометріи, не представляющія впрочемъ ничего, кромѣ простой номенклатуры.

---

[95]) Въ этой осьмой книгѣ находится весьма замѣчательная глава подъ заглавіемъ: *Quod tellus non sit centrum omnibus planetis*, въ которой Марціанъ Капелла заставляетъ Меркурія и Венеру обращаться около солнца. Отсюда Коперникъ почерпнулъ первую мысль о своей системѣ.

Тоже можно сказать о геометріи Кассіодора, заключающейся въ его шестнадцатой книгѣ, гдѣ говорится о семи свободныхъ искуствахъ; и о геометрическомъ отдѣлѣ энциклопедіи знаменитаго Исидора Севильскаго, извѣстной подъ заглавіемъ *Etymologiae*.

Геометрія Боэція имѣетъ болѣе значенія, чѣмъ только что названныя сочиненія; въ ней болѣе ученыхъ достоинствъ; въ ней въ первый разъ встрѣчаемся у Римлянъ съ геометріею Евклида и находимъ нѣкоторыя интересныя свѣдѣнія по исторіи наукъ. Мы представимъ обзоръ этого сочиненія, которое въ настоящее время мало извѣстно.

Оно состоитъ изъ двухъ книгъ. Первая книга представляетъ почти буквальный переводъ опредѣленій и предложеній, заключающихся въ первыхъ четырехъ книгахъ Евклида. Затѣмъ находимъ, подъ заглавіемъ *de figuris geometricis*, нѣсколько задачъ, рѣшенныхъ самимъ Боэціемъ, но не представляющихъ ничего интереснаго.

Первая книга оканчивается изложеніемъ новой системы счисленія, отличающейся и отъ греческой и отъ римской, системы, въ которой употребляются девять цифръ и въ которой думали найти во всѣхъ подробностяхъ нашу современную систему счисленія. Но этотъ историческій вопросъ, уже около двухъ столѣтій обращающій на себя вниманіе ученыхъ, до сихъ поръ не рѣшенъ еще окончательно. Ниже мы возвратимся къ этому интересному мѣсту геометріи Боэція. Мы разберемъ также въ особой главѣ еще другое мѣсто той же книги, гдѣ, какъ намъ кажется, находится описаніе звѣздчатаго пятиугольника, или пятиугольника втораго рода.

Вторая книга посвящена практической геометріи въ томъ видѣ, какъ она была извѣстна римскимъ землемѣрамъ. Этой второй книгѣ соотвѣтствуетъ рукописный трактатъ практической геометріи, разборъ котораго мы предложили, говоря о Фронтинѣ; намъ кажется, что вторая книга Боэція списана была съ этой рукописи; онѣ отличаются между собою существенно только въ двухъ мѣстахъ и притомъ къ

невыгодѣ Боэція. Этотъ писатель не даетъ формулы для вычисленія площади треугольника по тремъ сторонамъ, которая есть въ рукописи, и приводитъ невѣрное правило для вычисленія площади четыреугольника, употреблявшееся римскими землемѣрами, котораго въ рукописи нѣтъ.

Предлагая формулы для построенія въ цѣлыхъ числахъ прямоугольнаго треугольника по одной данной сторонѣ, Боэцій приписываетъ формулу, относящуюся къ случаю, когда данная сторона есть число четное, Архитасу. Извѣстно, что Проклъ приписываетъ эту формулу Платону, а другую Пиѳагору.

Къ концу этой практической геометріи прибавлена еще часть, находящаяся не во всѣхъ рукописяхъ Боэція и имѣющая слѣдующее содержаніе. Послѣ нѣкоторыхъ разсужденій о происхожденіи, пользѣ и превосходствѣ геометріи, Боэцій приводитъ содержаніе одного письма Юлія Цезаря, изъ котораго видно, что этотъ великій человѣкъ желалъ, чтобы во всей римской имперіи и ея колоніяхъ геометрія служила основаніемъ для измѣренія и ограниченія земель, публичныхъ и частныхъ зданій, городскихъ укрѣпленій и большихъ дорогъ. Авторъ исчисляетъ потомъ разные спорные случаи, которые могутъ представиться въ землемѣрныхъ работахъ. Онъ показываетъ, какими качествами долженъ обладать землемѣръ и приводитъ имена знаменитѣйшихъ землемѣровъ и тѣхъ императоровъ, по повелѣнію которыхъ они работали. Далѣе приводятся названія различныхъ пограничныхъ знаковъ употреблявшихся для указанія границъ провинцій, большихъ дорогъ и частныхъ владѣній. Потомъ авторъ перечисляетъ знанія въ ариѳметикѣ и геометріи, необходимыя для настоящаго геометра. Эти знанія состоятъ изъ свойствъ чиселъ, ихъ раздѣленія на четныя, нечетныя, сложныя и проч.; изъ логическаго порядка въ изученіи геометріи; изъ опредѣленій фигуръ, обнимающихъ самую элементарную часть этой науки, и изъ различныхъ единицъ мѣры, употреблявшихся у римскихъ землемѣровъ.

Сочиненіе оканчивается отрывкомъ, относящимся только

къ ариѳметикѣ, и мы замѣтили, что здѣсь просто соединены разныя мѣста изъ первой книги ариѳметики Боэція, расположенныя въ такомъ порядкѣ: глава 32, потомъ вступленіе и за тѣмъ главы 1, 2, 1, 32, 19, 20, 22, 12, 26 и 27. Весь этотъ отрывокъ безъ сомнѣнія чуждъ геометріи Боэція и присоединенъ былъ по ошибкѣ какого нибудъ компилятора.

Во всѣхъ изданіяхъ сочиненій Боэція и въ большинствѣ рукописей находятся только двѣ книги его геометріи. Но есть рукописи, въ которыхъ геометрія состоитъ изъ пяти главъ. Одна изъ такихъ рукописей находится, какъ указываетъ Либри, во Флоренціи, въ библіотекѣ Св. Лаврентія [96]). Изъ *Bibliotheca bibliothecarum* Монфокона (t. I, p. 88) узнаемъ, что другая подобная же рукопись существуетъ въ библіотекѣ Ватикана, вмѣстѣ съ *трактатомъ о числахъ, въ двухъ книгахъ* (*Boetii de numeris duo libri*); кажется, это послѣднее сочиненіе отличается отъ ариѳметики Боэція. Желательно, чтобы эти рукописи, которыя могутъ быть полезны для исторіи наукъ, вышли наконецъ изъ пыли библіотекъ.

О томъ мѣстѣ первой книги Геометріи Боэція, которое относится къ новой системѣ счисленія.

Мѣсто въ Геометріи Боэція, о которомъ мы говоримъ, оставалось, кажется, долгое время незамѣченнымъ, хотя сочиненія этого писателя нерѣдки въ рукописяхъ, геометрія же его была напечатана въ 1491, 1499 и 1570 годахъ. Кажется, только около середины XVII вѣка Исаакъ Воссій, въ примѣчаніяхъ къ географіи Помпонія Мелы, обратилъ вниманіе на это мѣсто и показалъ, что въ немъ содержится девять *знаковъ* или *цифръ*. Съ тѣхъ поръ часто возбуждался вопросъ, дѣйствительно ли Боэцій говоритъ здѣсь о нашей системѣ счисленія и дѣйствительно ли она была извѣстна Грекамъ, какъ слѣдуетъ это изъ его словъ.

---

[96]) *Histoire des sciences en Italie*, t I, p. 89.

Этотъ историческій вопросъ представлялъ много интереса и самъ по себѣ и по своей важности для рѣшенія болѣе общаго вопроса о происхожденіи индѣйскаго счисленія и о томъ, какимъ путемъ оно распространилось такъ далеко и явилось вдругъ у насъ во многихъ сочиненіяхъ въ началѣ XIII столѣтія [97]).

---

[97]) 1⁰ Въ сочиненіи Леонарда Фибонакки изъ Пизы, которое начинается такъ: *Incipit liber Abbaci, compositus a Leonardo filio Bonacci Pisano, in anno* 1202; въ немъ же встрѣчаемъ въ первый разъ въ Европѣ начало алгебры.

2⁰ Въ сочиненіи о практической ариѳметикѣ Іордана Неморарія (около 1200), оставшемся въ рукописи въ библіотекѣ Савилія подъ заглавіемъ: *Algorismus Jordâni, tam in integris quam in fractis demonstratus.* Это сочиненіе отличается отъ умозрительной ариѳметики въ десяти книгахъ того же автора, которая была издана и объяснена въ 1496 году Фабромъ (Fabre d'Etaples).

3⁰ Въ трактатѣ ариѳметики Сакро Боско, подъ заглавіемъ: *Tractatus Algorismi*, написанномъ въ стихахъ въ 1236 году и начинающемся слѣдующими двумя стихами:

Haec algorismus, ars praesens, dicitur in qua
Talibus Indorum fruimur bis quinque figuris.

4⁰ Въ одномъ мѣстѣ сочиненія *Speculum doctrinale* Винцента де-Бове (1194—1264), озаглавленномъ: *De computo et algorismo* (lib XVI, cap. 9), гдѣ изложено полное знаніе нашихъ девяти цифръ, измѣненіе величины ихъ съ положеніемъ и употребленіе нуля.

5⁰ Въ *L'Algorisme*, или *Traité d'Arithmétique*, написанномъ по французски неизвѣстнымъ писателемъ при Филиппѣ III Смѣломъ (1270—1285). (M. Daunou въ своей рѣчи о состояніи литературы во Франціи въ XIII вѣкѣ, помѣщенной въ началѣ XVI тома *Histoire littéraire de la France* (in 4⁰, Paris, 1824), упоминаетъ объ этомъ трактатѣ и говоритъ, что онъ находится въ библіотекѣ Св. Женевьевы подъ n⁰ BB_2, in 4⁰, но, не смотря на многократные поиски хранителей этой библіотеки, мы не могли его тамъ отыскать).

6⁰ Въ трактатѣ Максима Плануда (Maximus Planudes), написанномъ по гречески, около конца XIII вѣка, подъ заглавіемъ: *Счисленіе Индѣйцевъ, называемое большимъ счисленіемъ* (ψηφοφορία κατ' Ἰνδούς, ἡ λεγομένη μεγάλη).

Странно, что до сихъ поръ не былъ еще напечатанъ ни одинъ изъ этихъ трактатовъ ариѳметики, столь драгоцѣнныхъ для исторіи науки и представляющихъ такой важный шагъ въ развитіи ума человѣческаго.

Впрочемъ до сихъ поръ еще не согласились окончательно относительно истиннаго значенія этого мѣста изъ Боэція; большею частію высказывается мнѣніе въ пользу другаго отрывка, относящагося къ X вѣку, именно письма и небольшаго трактата, которые приписываются Герберту (сдѣлавшемуся папой въ 999 году подъ именемъ Сильвестра II) и въ которыхъ замѣчена была наша система счисленія; послѣ того какъ Валлисъ высказалъ это мнѣніе въ своей *Исторіи Алгебры*, стали повторять, что Гербертъ первый познакомилъ насъ съ индѣйской системой счисленія, научившись ей самъ у Сарациновъ въ Испаніи. Это же мнѣніе высказано было недавно знаменитымъ президентомъ азіатскаго общества въ Лондонѣ, въ его ученомъ разсужденіи о происхожденіи алгебры [98]).

Но надобно сказать, что мнѣніе это основано не столько на самомъ трактатѣ Герберта, который читали немногіе и котораго совсѣмъ не зналъ Валлисъ, сколько на единственномъ свидѣтельствѣ Вильяма Мальмесбюри, историка XII вѣка, слова котораго [99]) были черезъ сто лѣтъ заимствованы и повторены Винцентомъ-де-Бове [100]). И странное

Кромѣ этого существуютъ еще другія сочиненія того же времени, въ которыхъ употребляются арабскія цифры, напримѣръ: Календарь Рожера Бекона, Письма Іордана Неморарія и сочиненія *De sphaera* и *De computo* Сакро Боско.

[98]) *This* (Gerbert) *upon his return, he communicated to Christian Europe, teaching the method of numbers under the designation of Abacus, a name apparently first introduced by him* (rationes numerorum Abaci), *by rules abstruse and difficult to be understood, as William of Malmesbury affirms. It was probably owing to this obscurity of his rules and manner or treating the Arabian, or rather Indian arithmetic, that is made so little progress between his time and that of the Pisan* (*Leonärdo of Pisa*). (Colebrooke, *Brahmegupta and Bhascara, Algebra*, dissertation, p. LIII.)

[99]) *Abacum certe primus a Saracenis rapiens, regulas dedit, quae a sudantibus abacistis vix intelliguntur.* См. *De gestis Anglorum libri* V. (Lib. II, p. 64 et 65.)

[100]) *Speculum historiale.* Duaci, 1624, in fol. См. lib. XXIV, cap. 98, p. 997.

дѣло, еслибы основаніемъ мнѣнію Валлиса служило дѣйствительно изученіе этого трактата, то мы не колеблясь сказали бы, что этимъ самымъ рѣшается вопросъ объ отрывкѣ изъ Боэція и что честь, приписываемая Герберту, должна принадлежать Боэцію. Потому что, сравнивая трактатъ Герберта съ отрывкомъ изъ Боэція, мы убѣдились несомнѣнно, что въ нихъ рѣчь идетъ совершенно объ одномъ и томъ же предметѣ и объ одной и той же системѣ счисленія; такъ, что оба эти сочиненія должны были проистекать изъ одного источника. Мнѣніе это, до сихъ поръ еще никѣмъ не высказанное, требуетъ еще подтвержденія: мы возвратимся къ этому въ другое время и выскажемъ тогда еще нѣсколько замѣчаній по поводу трактата Герберта [101]). Здѣсь же мы должны ограничиться только разборомъ мѣста изъ геометріи Боэція, представляющаго самую важную часть этого сочиненія, особенно въ качествѣ единственнаго историческаго документа.

Вотъ почти буквальный переводъ, который, какъ намъ кажется, передаетъ смыслъ этого мѣста:

---

[101]) Принадлежитъ ли, напримѣръ, дѣйствительно Герберту этотъ трактатъ и письмо, служащее ему предисловіемъ? И, если согласимся, что въ нихъ говорится о нашей системѣ счисленія (что, по моему мнѣнію, вѣрно), то перешла ли она прямо отъ испанскихъ Сарациновъ? Эти два вопроса, которые мы поднимаемъ здѣсь въ первый разъ послѣ того, какъ Герберту стали приписывать, опираясь на авторитетъ Мальмесбюри, перенесеніе къ намъ арабской системы, не лишены, можетъ быть, интереса. Обыкновенно думаютъ, что этотъ трактатъ и письмо остались въ рукописи, но они напечатаны цѣликомъ подъ заглавіемъ: *De numerorum divisione* въ сочиненіяхъ Беда (672—735), какъ-бы принадлежащія этому писателю. Удивительно, что они не были замѣчены здѣсь Монтуклою и Деламбромъ, которые оба говорили о этой главѣ математическихъ сочиненій Беда. (См. *Histoire des mathématiques*, t. I p. 495; и *Histoire de l'astronomie ancienne*, t. I, p. 322.)

Теперь является, можетъ быть новый историческій вопросъ, не принадлежатъ ли Беду письмо и система нумераціи, приписываемыя Герберту.

Мы не желаемъ касаться этого вопроса, которымъ могли бы заняться ученые, продолжающіе изданіе *Histoire littéraire de la France*; мы

«Древніе обыкновенно называли *digitus* всякое число, не «превосходящее первый *limes*, т. е. всѣ числа, считаемыя «отъ одного до десяти, именно: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9.

«Они называли словомъ *articuli* числа десятковъ и слѣ«дующихъ порядковъ до безконечности [102]).

позволимъ себѣ сказать только, что значительное сходство, замѣченное нами между этимъ трактатомъ и мѣстомъ изъ Боэція, какъ въ содержаніи, такъ даже и въ самыхъ словахъ, заставляетъ предполагать писателя, болѣе близкаго къ Боэцію, слѣдовательно Беда, который жилъ позднѣе его только двумя столѣтіями. Другой доводъ заключается въ томъ, что во времена Герберта Мавры въ Испаніи должны были употреблять, подобно Индѣйцамъ и Арабамъ, *нуль* (или *точку* вмѣсто *нуля*); такъ что Гербертъ, перенося ихъ систему счисленія, также употреблялъ бы нуль и ясно говорилъ бы о немъ; между тѣмъ мы не можемъ найти никакого слѣда нуля въ этомъ сочиненіи и должны предполагать, что этотъ вспомогательный знакъ замѣнялся употребленіемъ столбцевъ, какъ у Боэція, о чемъ будемъ сейчасъ говорить. Наконецъ третье соображеніе, подтверждающее возможность того, что Беда могъ написать этотъ трактатъ, состоитъ въ томъ, что наши цифры найдены были въ нѣкоторыхъ весьма древнихъ рукописяхъ сочиненій Беда, какъ это замѣчено Валлисомъ въ Исторіи Алгебры (стр. 11).

[102]) Т. е. числа въ десять, сто и т. д. разъ большія одного *digitus*. Это раздѣленіе чиселъ на *digiti* и *articuli* имѣло главною цѣлью дать особое названіе цифрамъ единицъ и десятковъ въ числахъ, состоящихъ изъ двухъ цифръ, напр. 27, такъ какъ эти двѣ цифры при вычисленіи могутъ являться вовсе не какъ единицы и десятки. Это случится, напримѣръ, когда число 27 при умноженіи получится отъ произведенія первой цифры множителя на вторую или третью цифру множимаго.

Названія *digitus* и *articulus* заслуживаютъ особаго вниманія, потому что ими одними, можно сказать, уже указывается наша система счисленія, въ которой они съ того времени постоянно употреблялись: именно въ X вѣкѣ или ранѣе въ трактатѣ, приписываемомъ Герберту; въ XIII вѣкѣ въ сочиненіяхъ Сакро Боско, Винцента де Бове и др.; въ эпоху возрожденія во всѣхъ сочиненіяхъ по ариѳметикѣ, которыя начинались всегда также какъ и это мѣсто изъ Боэція. См. *Opusculum de praxi numerorum quod algorismum vocant*, весьма древнее сочиненіе, которое нашелъ и издалъ въ 1503 году Jodocus Clichtoveus; *Margarita philosophica; Summa de Arithmetica* Луки Бурго; *Algorithmus demonstratus* Шонера; *Septem partium Logisticae arithmetices questiones*

«*Numeri compositi* суть тѣ, которыя заключаются между «первымъ и вторымъ *limes*, т. е. между десятью и двадцатью «и всѣ слѣдующія за исключеніемъ *limites*.

«*Numeri incompositi* суть всѣ *digiti* и *limites* [103]).

«Умножающія числа измѣняютъ свои мѣста; т. е. большее «число есть иногда множитель меньшаго, а иногда меньшее «множитель большаго. Часто число есть множитель самаго «себя. Но дѣлителями большихъ чиселъ бываютъ всегда чи«сла меньшія.

. . . .

«Пиѳагорейцы, чтобы избѣжать ошибокъ при умноженіяхъ, «дѣленіяхъ и измѣреніяхъ (такъ какъ они во всѣхъ вещахъ «отличались изобрѣтательностію и утонченностію), изобрѣ-

---

Шротера; *Arithmetica practica in quinque partes digesta* Морсіана; *Arithmetica practica libris IV absoluta* Оронція Фине; *Arithmeticae practicae methodus facilis*, Геммы Фризія и пр.)

[103]) Такимъ образомъ *limites* были ничто иное какъ *articuli*.

Въ сущности, слѣдовательно, было только три рода чиселъ: *digiti*, *articuli* и *numeri compositi*..

Такое раздѣленіе чиселъ на три рода излагалось во всѣхъ ариѳметикахъ въ эпоху возрожденія. Слово *limes* употреблялось также во многихъ сочиненіяхъ, но оно не означало чиселъ и прилагалось только къ совокупности чиселъ. Словомъ *limites* означались разные порядки: единицы, десятки, сотни и т. д., что Греки называли ἐννεάδεζ. Такимъ образомъ *primus limes* означало порядокъ или столбецъ единицъ, *secundus limes*—порядокъ или столбецъ десятковъ и такъ далѣе.

Въ слѣдующемъ мѣстѣ изъ *Algorithmus demonstratus* Шонера совершенно ясно опредѣлено значеніе словъ *digitus*, *articulus*, *numerus compositus* и *limes*.

Digitus est omnis numerus minor decem. Articulus est omnis numerus qui digitum decuplat, aut digiti decuplum, aut decupli decuplum, et sic in infinitum. Separantur autem digiti et articuli in limites. Limes est collectio novem numerorum, qui aut digiti sunt, aut digitorum aeque multiplices, quilibet sui relativi. Limes itaque primus digitorum. Secundus primorum articulorum. Tertius est secundorum articulorum. Et sic in infinitum. Numerus compositus est qui constat ex numeris diversorum limitum. Item numerus compositus est qui pluribus figuris significativis represantatur.

«ли для своего употребленія *таблицу*, которую они въ «честь своего учителя, назвали *таблицею Пиѳагора*; пото«му что первую мысль о написанномъ ими они получили «отъ этого философа. Новые назвали эту таблицу *abacus*.

«При помощи этого средства, они могли найденное усиліями «своего ума сдѣлать легко доступнымъ обыкновенному и «всеобщему познанію и, такъ сказать, очевиднымъ для глаза. «Таблицѣ этой они придали довольно любопытную форму, «которая изображена ниже.»

Послѣ этого слѣдуетъ *таблица умноженія*, какъ въ изданіяхъ Боэція, такъ вѣроятно и въ рукописяхъ, бывшихъ въ распоряженіи писателей изучавшихъ это мѣсто; потому что всѣ разсужденія ихъ основываются на такомъ предположеніи и Вейдлеръ видитъ въ этомъ доказательство, что Боэцій описываетъ здѣсь именно наши цифры и нашу систему счисленія [104]). Но такой таблицы Пиѳагора нѣтъ въ прекрасной рукописи XI вѣка, принадлежащей библіотекѣ Шартра, рукописи, которая во многихъ мѣстахъ правильнѣе изданія 1570 года. Это обстоятельство пораждаетъ мысль, что то, о чемъ Боэцій говоритъ въ дѣйствительности, вовсе не было *таблицей умноженія* (которая на основаніи именно этого мѣста и названа была впослѣдствіи *Пиѳагоровою*). По этой причинѣ мы предположили, что трудность объяснить смыслъ словъ автора могла происходить отъ того, что ихъ относили къ *таблицѣ умноженія*. Но что же было на ея мѣстѣ? Наша рукопись не даетъ прямаго отвѣта на этотъ вопросъ, но можетъ, кажется, навести на истинный путь.

Вотъ что мы въ ней находимъ.

Въ первой строкѣ написаны девять знаковъ, которыми Боэцій означалъ девять первыхъ чиселъ: одинъ, два, три.... девять. Они написаны отъ правой руки къ лѣвой и надъ ними означены ихъ имена.

---

[104]) *Spicilegium observationum ad historiam numeralium pertinentium*, etc. Wittemberg, in 4°, 1755, (28 страницъ).

Quimas.	Arbas.	Ormis.	Andras.	Igin.
Ч	B	Ђ	Շ	I
	Sipos.			
	Celentis.	Temenias.	Zenis.	Caltis.[105]
ⓐ	σ	ꞩ	Λ	Ь

Послѣ девяти знаковъ мы видимъ кружокъ, въ которомъ вписана буква *a*; ниже мы будемъ говорить объ этомъ десятомъ знакѣ.

Подъ этой первою строкою находится другая, на которой написаны римскія цифры I, X, C, M, $\overline{\text{X}}$, $\overline{\text{C}}$, M.$\overline{\text{I}}$ и проч. также отъ правой руки къ лѣвой.

Затѣмъ, въ трехъ другихъ строкахъ написаны римскими цифрами другія числа, именно: половины, четвертыя и осьмыя части предыдущихъ.

Наконецъ еще въ двухъ строкахъ помѣщены другіе римскіе знаки, изображающіе дѣленія унца (*uncia*, дюймъ) и въ послѣдней строкѣ—числа 1, 2, 3, 4,....12, написанныя римскими цифрами.

Изъ всего этого мы беремъ только строку цифръ I, X, C, M, $\overline{\text{X}}$ и т. д. и предполагаемъ, что *таблица*, которая, по словамъ Боэція, «названа была древними *таблицею Пиѳагора* «и получила у новыхъ названіе *Abacus*», во-все не есть *таблица умноженія*, но таблица, назначаемая для вычисленій при помощи новой, излагаемой здѣсь, системы нумераціи.

Особенности этой таблицы и годность ея для подобной цѣли заключаются въ слѣдующемъ.

---

[105]) Названія эти найдены уже были въ одной рукописи ученымъ оріенталистомъ Greaves'омъ. Знаменитый Гюэ (Huet, évêque d'Avranche) думалъ, что они внесены были туда позднѣе Боэція въ то время, когда ъ Европѣ распространялось знаніе арабской литтературы, съ тою цѣлью, чтобъ указать на ихъ восточное происхожденіе. Четыремъ словамъ *Arbas, Quimas, Zenis* и *Temenias* онъ приписывалъ происхожденіе еврейское (*Demonstratio Evangelica*, prop. IV. Также Гейльброннера *Historia matheseos*, p. 744.)

Въ верхней части начерчена была горизонтальная линія, раздѣленная на нѣсколько равныхъ частей и изъ точекъ дѣленія проведены были вертикальныя линіи. Каждыя двѣ такія линіи составляли *столбецъ* (*columna*).

Надъ столбцами, на горизонтальной линіи написаны были, отъ правой руки къ лѣвой, римскія цифры I, X, C, M, X̄, C̄, M. Ī, X. M. Ī, и проч., означающія одинъ, десять, сто, тысячу, десять тысячъ, сто тысячъ, тысячу тысячъ, десять тысячъ тысячъ и т. д.

X.Ī.M.Ī	Ī.M.Ī	C.M.Ī	X.M.Ī	M.Ī	C̄	X̄	M	C	X	I

При помощи этой *таблицы*, вводимой нами вмѣсто *таблицы умноженія*, мы можемъ, кажется, сдѣлать понятнымъ текстъ Боэція, переводъ котораго будемъ теперь продолжать:

»Вотъ какъ пользовались только что описанною табли-«цею. Употребляли разной формы *apices* или *characteres*. «Нѣкоторые употребляли для *apices* слѣдующіе знаки: I, ко-«торый соотвѣтствовалъ единицѣ, ᘔ — двумъ, Ƶ — тремъ, «ꝏ — четыремъ, Ч — пяти, Ƿ — шести, Ɲ — семи «8 — восьми и наконецъ 9 — девяти [106]). Другіе, чтобы

---

[106]) Воспроизводимъ здѣсь девять цифръ въ томъ видѣ, какъ онѣ изображены въ этомъ мѣстѣ нашей рукописи. Многія изъ нихъ, какъ мы видимъ, отличаются отъ цифръ, находящихся внѣ текста; это заставляетъ предполагать, что послѣднія были прибавлены какимъ нибудь переписчикомъ. Этимъ подтверждается наше мнѣніе, что строка этихъ цифръ въ подлинной рукописи Боэція не входила въ составъ *таблицы*, о которой онъ говоритъ; такъ что таблица состояла только изъ вертикальныхъ столбцовъ, наверху которыхъ были надписаны числа: одинъ, десять, сто, тысяча и т. д., означавшія *единицы*, *десятки*, *сотни* и пр.

«пользоваться этой таблицей, брали буквы азбуки, такъ что «первая буква соотвѣтствовала единицѣ, вторая — двумъ, «третья—тремъ и слѣдующія—слѣдующимъ по порядку чи-«сламъ. Наконецъ иные ограничивались употребленіемъ при «этихъ дѣйствіяхъ обыкновенныхъ знаковъ, и прежде упо-«треблявшихся для обозначенія чиселъ. Эти *apices* (каковы «бы они ни были) употреблялись точно также какъ пыль [107]), «такъ что если они помѣщались подъ единицами, то каж-«дый изъ нихъ могъ означать только *digiti.*»

Эта послѣдняя фраза и слѣдующія за нею весьма важны. Въ нихъ именно выражается, какъ кажется, отличительный характеръ нашей системы счисленія, именно: *значеніе мѣста цифръ.* Чтобы понимать эти фразы, необходимо обратить вниманіе на таблицу, описанную и начерченную нами выше; здѣсь именно оказывается польза и употребленіе этой таблицы.

Повторимъ послѣднюю фразу Боэція и будемъ продолжать:

«Если различные *apices* помѣщались подъ единицею (т. «е. въ *столбцѣ единицъ*), то они всегда представляли *digiti.*

«Если помѣстимъ первое число, т. е. два (потому что «единица, какъ говорится въ ариѳметикахъ, не есть число, но «начало и основаніе чиселъ), итакъ, помѣщая *два* подъ «линіею, означенною числомъ *десять*, условились, что это «означаетъ *двадцать; три* означало бы *тридцать*; *четыре* «—*сорокъ;* и другимъ слѣдующимъ числамъ придали также «значеніе, соотвѣтственно ихъ наименованію.

«Помѣщая тѣже *apices* подъ линіею, отмѣченною числомъ «*сто*, положили, что 2 будетъ означать *двѣсти;* 3—*три-«ста*; 4—*четыреста*; и также другія, соотвѣтственно ихъ «наименованіямъ.

«И такъ далѣе для слѣдующихъ *столбцевъ:* эта система «не вела ни къ какимъ ошибкамъ.»

---

[107]) *Ita varie seu pulverem dispergere*.....Боэцій, безъ сомнѣнія, дѣлаетъ намекъ на *pulvis eruditus* Цицерона (*De natura Deorum*, lib. II),—пыль, которою древніе посыпали *abaci*, чтобы чертить на нихъ геометрическія фигуры.

Во всемъ этомъ можно, кажется, видѣть довольно ясное описаніе начала нашей системы счисленія, т. е. *значеніе положенія цифръ*, возрастающее въ десятичной прогрессіи съ права на лѣво. Употребляемые при этомъ *столбцы*, названные въ текстѣ словомъ *paginula* или *pagina* (полоска) давали возможность обойтись безъ нуля, такъ какъ тамъ, гдѣ мы его употребляемъ, оставалось пустое мѣсто.

Прибавленіе. Слова *pagina* и *paginula*, которыя мы перевели словомъ *столбецъ*, чтобы придать ясный смыслъ тексту Боэція, употреблены были этимъ авторомъ еще въ главѣ XVI четвертой книги его трактата о музыкѣ; и здѣсь они имѣютъ очевидно то же самое значеніе: столбцы здѣсь описаны и означены на чертежѣ и въ текстѣ буквами.

Почти такое же значеніе словъ *pagina* и *paginula* находимъ мы еще въ одной астрономической статьѣ, гдѣ ими обозначено разстояніе между двумя концентрическими кругами при описаніи астролябіи. Статья эта находится въ рукописи XI вѣка послѣ письма Герберта къ Константину о построеніи небесной сферы. (Manuscrit de la bibliothèque de Chartres).

Одно мѣсто изъ ариѳметики Плануда также согласно съ предположеніемъ, что при введеніи нашей системы счисленія употреблялись столбцы, дѣлавшіе ненужнымъ употребленіе нуля. Планудъ говоритъ, что нуль (τζιφρα) *ставится на пустыхъ мѣстахъ; и какъ мѣста увеличиваютъ значеніе цифръ, также дѣйствуютъ и нули, замѣняющіе пустыя мѣста.* [108]) Такимъ образомъ прежде введенія нуля употреблялись пустыя мѣста, что могло быть возможно только при помощи столбцевъ. Когда захотѣли уничтожить столбцы и не стѣсняться употребленіемъ таблицы, приготовленной для такого рода вычисленій, то очень можетъ быть, что сначала оставляли ихъ только тамъ, гдѣ были пустыя мѣста; такъ, что двѣ маленькія вертикальныя линіи (составляющія *столбецъ*) означали пустое мѣсто и замѣняли собою теперешній нуль *). Послѣ того измѣнили это

[108]) Delambre, *Histoire de l'astronomie ancienne*, t. I, p. 519.

*) Послѣдняя фраза была первоначально напечатана авторомъ въ такомъ видѣ: «Peut-être, quand on aura voulu supprimer les colonnes,

означеніе въ нашъ обыкновенный нуль, который проще пишется.

Изложивъ сжато начало новой системы счисленія, Боэцій даетъ правила для умноженія и дѣленія. Вотъ какъ онъ ихъ выражаетъ:

«При умноженіяхъ и дѣленіяхъ надобно знать и наблю«дать старательно, въ какомъ *столбцѣ* должно помѣщать «*digiti* и въ какомъ *articuli*. Ибо, если число *единицъ* есть «множитель числа *десятковъ*, то *digiti* помѣщаются къ де«сяткамъ, а *articuli* къ сотнямъ; если тоже число есть мно«житель числа сотенъ, то *digiti* помѣщаются къ сотнямъ, «и *articuli* къ тысячамъ; если оно есть множитель числа «тысячъ, то *digiti* помѣщаются къ тысячамъ, а *articuli* къ «десяткамъ тысячъ; если-множитель числа сотенъ тысячъ, «то *digiti* помѣщаются къ сотнямъ тысячъ, а *articuli* къ «тысячамъ тысячъ.

«Но если число десятковъ есть множитель числа десят«ковъ, то *digiti* помѣщаются въ *столбцѣ отмѣченномъ чи«сломъ сто*, а *articuli* къ тысячамъ.

«Если оно есть множитель числа сотенъ, то *digiti* помѣ«щаются къ тысячамъ, а *articuli* къ десяткамъ тысячъ.

«Если—множитель числа тысячъ, то *digiti* помѣщаются «въ столбцѣ десятковъ тысячъ, а *articuli* въ столбцѣ со«тенъ тысячъ.

«И если оно есть множитель сотенъ тысячъ, то *digiti* по«мѣщаются къ тысячамъ тысячъ, а *articuli* къ десяткамъ «тысячъ тысячъ.

«Подобнымъ же образомъ, если число сотенъ есть мно«житель и т. д.»

Все это мѣсто очень понятно и совершенно соотвѣтствуетъ правиламъ, наблюдаемымъ нами при умноженіи; въ слу-

---

«et ne pas s'astreindre à l'usage d'un tableau, préparé pour ce genre de «calculs, aura-t-on laissé seulement celles où se trouvaient des zéros «de sorte qu'alors deux petites lignes verticales (formant une *colonne*) «auraient fait l'office du zéro.»; потомъ она исправлена въ прибавленіяхъ. *Пр. Перев.*

чаѣ нужды, оно можетъ служить подтвержденіемъ того смысла, который мы придали предыдущимъ фразамъ. Въ этомъ именно мѣстѣ находили главнымъ образомъ сходство съ нашею системою счисленія.

Затѣмъ слѣдуютъ правила дѣленія. Авторъ начинаетъ такъ:

«Теперь уже дѣленія какихъ угодно большихъ чиселъ «будутъ нетрудны для читателя, умъ котораго подготовленъ «предыдущимъ. Поэтому мы будемъ говорить кратко и, если «встрѣтится какое нибудь затрудненіе, то мы предоставля«емъ вниманію читателя заботу разрѣшить его.»

Неясность текста непозволяетъ намъ переводить далѣе; мы предполагаемъ, что текстъ этотъ дошелъ до насъ въ неполномъ и искаженномъ видѣ; но нѣтъ надобности въ продолженіи, чтобъ составить мнѣніе о системѣ счисленія, излагаемой Боэціемъ: для этого совершенно достаточно предыдущаго.

Правила дѣленія, предлагаемыя авторомъ, относятся, какъ намъ кажется, къ слѣдующимъ случаямъ:

1° Раздѣлить десятки на десятки, или сотни на сотни и т. д.

2° Раздѣлить десятки, сотни, или тысячи и т. д. на единицы; или сотни, тысячи и т. д. на десятки.

3° Раздѣлить десятки или число, составленное изъ десятковъ и единицъ, на число, составленное изъ десятковъ и единицъ.

4° Раздѣлить сотни или тысячи и т. д. на число состоящее изъ десятковъ и единицъ.

5° Наконецъ, раздѣлить сотни или тысячи на число, состоящее изъ сотенъ и единицъ.

Здѣсь кончается первая книга Геометріи Боэція.

На приведенное нами мѣсто указывали, какъ на единственное, въ которомъ говорится о новой системѣ счисленія; и оно, вѣроятно, встрѣчалось дѣйствительно одно въ рукописяхъ, надъ которыми работали до сихъ поръ. Но рукопись, находящаяся у насъ передъ глазами, содержитъ въ концѣ второй книги о томъ же предметѣ еще другое

мѣсто, которое заслуживаетъ вниманія, такъ какъ въ немъ, какъ намъ кажется, весьма ясно выражено значеніе мѣста цифръ. Вотъ оно:

Вслѣдъ за таблицею долей унца Боэцій прибавляетъ:

«При составленіи таблицы, приведенной выше, они (дре-«вніе) употребляли знаки разнаго рода и различныхъ формъ. «У насъ во всѣхъ вычисленіяхъ подобнаго рода употре-«бляются только тѣ знаки, которые мы изобразили при по-«строеніи *abacus*. Первую линію этой таблицы мы назначи-«ли для единицъ, вторую для десятковъ, третью для сотенъ, «четвертую для тысячъ, наконецъ другія линіи для *limites*[109]) «другихъ чиселъ. Если *apices* помѣщены въ первой линіи, «то они означаютъ единицы, во второй—десятки, въ третьей «—сотни, въ четвертой—тысячи и такъ далѣе.»

Послѣ этого Боэцій показываетъ величины долей унца, для которыхъ прежде этого онъ далъ только названія *digitus*, *statera*, *quadrans*, *drachma* и пр.

Все это мѣсто относится очевидно къ таблицѣ дѣленій унца и должно быть внесено въ сочиненіе Боэція.

Изъ предыдущаго можно, кажется, заключить, что излагаемая Боэціемъ система счисленія есть десятичная система, въ которой употребляемыя имъ девять цифръ получали, смотря по положенію, различныя величины, возрастающія въ десятичной прогрессіи отъ правой руки къ лѣвой; и что эта система счисленія есть ничто иное, какъ система Индѣйцевъ и Арабовъ и наша современная, съ тѣмъ только незначительнымъ различіемъ, что въ ней на практикѣ оставлялись пустыя мѣста тамъ, гдѣ мы ставимъ нуль; этотъ десятый, вспомогательный знакъ замѣнялся употребленіемъ столбцовъ, ясно обозначавшихъ порядки единицъ, десятковъ, сотенъ и т. д.

---

[109]) Здѣсь Боэцій употребляетъ слово *limes* въ значеніи подобномъ тому, какое дано было этому слову новыми. См. что мы говорили выше въ выноскѣ о *Algorithmus demonstratus* Шонера.

Мы должны прибавить, что въ рукописи, которою мы пользуемся, вслѣдъ за девятью цифрами съ надписанными ихъ именами находится послѣ цифры девять, въ той же строкѣ, десятый знакъ, именно кружокъ, въ которомъ написана маленькая буква *a*. Весьма вѣроятно, что этотъ десятый знакъ представляетъ собою нуль; вписанная буква *a* есть, можетъ быть, окончаніе слова *syphra*, или первая буква слова *arcus*; это слово употребляется въ той же рукописи въ другой статьѣ, также о системѣ счисленія, для обозначенія столбцовъ, потому что начерченные тамъ столбцы отмѣчены сверху дугами круговъ и буква *a* могла означать, что *кружокъ* замѣняетъ собою столбецъ. Такое происхожденіе нуля было бы весьма естественно.

Мы не думаемъ, что бы этотъ десятый знакъ находился въ подлинной рукописи; онъ, вѣроятно, былъ прибавленъ позднѣе. Но не излишне обратить на него вниманіе въ рукописи XI вѣка, потому что обыкновенно думаютъ, что нуль введенъ у насъ только въ началѣ XIII вѣка Фибонакки и это мнѣніе раздѣляется самыми почтенными писателями.

Наше изъясненіе этого мѣста изъ Боэція основывалось на двухъ предположеніяхъ: во первыхъ на томъ, что употребляемое тамъ слово *abacus* совсѣмъ не означаетъ *таблицы умноженія*, какъ это предполагалось до сихъ поръ; во вторыхъ,—что оно означаетъ *таблицу* особаго расположенія, примѣненную къ вычисленіямъ по новой системѣ нумераціи. Это двойное предположеніе не противорѣчитъ литературнымъ указаніямъ о древнемъ значеніи слова *abacus* и подтверждается значеніемъ, которое оно имѣло въ средніе вѣка и даже еще въ началѣ XVI вѣка.

Дѣйствительно:

1° Извѣстно изъ различныхъ греческихъ и римскихъ писателей, употреблявшихъ до Боэція слова ἄβαξ и *abacus*, что ими означалась собственно *таблица, на которой древніе дѣлали ариѳметическія вычисленія и чертили геометрическія фигуры*. (См. Polybius, lib. V; Plutarch, *Vita Catonis Uticensis*, въ концѣ; Persius, Sat. I, V. 131; Mar-

tianus Capella, *De nuptiis Philologiae et Mercurii* lib. VI, *de Geometria*.)

Прибавленіе. Nestor Dionysius въ своемъ *Vocabularium* даетъ слову *abacus* слѣдующее значеніе: *Tabella super qua decuplationes fiunt: Abacus dicta est quin etiam ipsa decuplatio.* (Изданіе 1496 г. Венеція, in fol.) Мѣсто это совершенно подходитъ къ нашему объясненію слова *abacus* и, кажется, доказываетъ, что въ XV вѣкѣ значеніе этого слова не было еще затеряно, какъ мы это предполагали уже по поводу одного мѣста изъ *Bibliothèque historiale* Vigner.

2° Нигдѣ, до Боэція, не говорилось ни о *таблицѣ умноженія*, ни о *таблицѣ Пиѳагора;* только основываясь на этомъ мѣстѣ его геометріи, гдѣ въ нѣкоторыхъ рукописяхъ вставлена *таблица умноженія*, стали ее называть впослѣдствіи *mensa pythagorica* и *abacus pythagoricus*.

Замѣчательно, что въ трактатѣ ариѳметики, гдѣ Боэцій часто употребляетъ эту таблицу, чтобы обнаружить свойства чиселъ различныхъ категорій, треугольныхъ, пятиугольныхъ и пр., онъ не называетъ ее ни Пиѳагоровою, ни словомъ *abacus*.

Послѣ Боэція одинъ только древній писатель Бедъ называлъ *mensa pythagorica seu abacus numerandi* таблицу умноженія, которая была гораздо пространнѣе нашей. Но нужно еще провѣрить, дѣйствительно-ли это двойное названіе находится въ рукописяхъ Беда, особенно самыхъ древнихъ.

3° Слово *abacus* употреблено въ письмѣ и въ трактатѣ *De numerorum divisione*, приписываемыхъ Герберту, и здѣсь оно очевидно означаетъ не таблицу умноженія, а именно новую систему счисленія, излагаемую авторомъ. Но, какъ мы говорили въ одной изъ предыдущихъ выносокъ, система эта совершенно одинакова съ системой Боэція; изъ этого нужно заключить, что и у Боэція также слово *abacus* имѣетъ особое значеніе, относящееся къ системѣ счисленія.

Мы полагаемъ, что Боэцій употреблялъ слово *abacus* (подразумѣвая можетъ быть при этомъ *pythagoricus*) для обозначенія таблицы, приспособленной къ вычисленіямъ по

новой системѣ; какой нибудь позднѣйшій писатель, напр. Гербертъ, могъ дать это названіе самой системѣ счисленія. Такое предположеніе подтверждается кажется мнѣніемъ, которое составилъ себѣ Валлисъ на основаніи многочисленныхъ историческихъ документовъ; именно, что слово *abacus* въ средніе вѣка и въ эпоху возрожденія употреблялось, какъ синонимъ слова *algorismus* (*De Algebra tractatus*, p. 16); что и то и другое слово всегда означало употребленіе арабскихъ цифръ для изображенія чиселъ, т. е. нашу систему счисленія [110]) (*ibid.*, p. 19); и что, если у какого нибудь писателя встрѣтится слово *algorismus*, то изъ этого съ достовѣрностію можно заключить, что арабскія цифры извѣстны были во времена этого писателя. [111])

---

[110]) Дѣйствительно, мы видимъ, что въ началѣ XIII вѣка Фибонакки свой трактатъ ариѳметики называетъ: *Liber abbaci.*

Спустя столѣтіе, другой италіанскій писатель Paolo di Dagomari который былъ извѣстенъ какъ геометръ, астрономъ и литераторъ, прозванъ былъ *Paolo dell'abbaco* за необыкновенное искуство въ вычисленіяхъ.

Въ концѣ XV вѣка Lucas Paccioli говоритъ, что наша система ариѳметики называлась *abacus*, какъ бы по арабски, *muodo arabico*; но, что по мнѣнію другихъ, это слово происходитъ отъ греческаго. (*Summa de Arithmetica. Distinctio 2—a; de numeratione.*)

Сочиненіе того же времени, автора Fr. Pellos, носитъ заглавіе: *Sensegue de la art de arithmeticha e semblantment de jeumetria dich ho nonimat compendion de lo abaco.....complida es la opera per Fr. Pellos.....Impresso in Thaurino, lo present compendion de abaco per...*1492

Наконецъ Clichtoveus въ началѣ XVI вѣка назвалъ свой трактатъ ариѳметики *Praxis numerandi quem abacum dicunt* и прибавилъ къ этому подобный же трактатъ древняго, неизвѣстнаго ему, автора, подъ заглавіемъ: *Opusculum de Praxi numerorum quod algorismum vocant.* Это ясно доказываетъ, что во времена Clichtoveus'а слова *abacus* и *algorismus* были синонимами и означали нашу систему счисленія, какъ это думалъ и Валлисъ.

[111]) *Et ubicunque in scriptore aliquo Algorismi nomen reperitur, certo concludas figuras hasce ea aetate fuisse cognitas* (*De Algebra Tractatus*, p. 12).

Мѣсто изъ геометріи Боэція и трактатъ *de numerorum divisione*, приписываемый Герберту, до сихъ поръ были единственными извѣстными древними памятниками нашей системы счисленія. Мы нашли третій, помѣщенный вслѣдъ за геометріей Боэція въ той же упомянутой нами рукописи XI вѣка. Мы ознакомимъ читателей съ этой статьей въ другомъ сочиненіи. Надѣемся, что она потдвердитъ смыслъ, приданный нами словамъ Боэція. Девять цифръ въ ней названы именами: *igin*, *andras* и т. д. и значенія ихъ, т. е. представляемыя ими числа, изображены въ слѣдующихъ девяти стихахъ:

Ordine primigeno [112])...nomen possidet *Igin*.
Andras ecce locum previndicat ipse secundum.
Ormis post numerus non compositus sibi primus.
Denique bis binos succedens indicat *Arbas*.
Significat quinos ficto de nomine *Quimas*.
Sexta tenet *Calcis* perfecto munere gaudens.
Zenis enim digne septeno fulget honore.
Octo beatificos *Temenias* exprimit unus.
Hinc sequitur *Sipos* est qui rota namque vocatur. [113])

Въ этомъ примѣчаніи мы имѣли въ виду найти истинное значеніе словъ Боэція и составить мнѣніе о томъ, относятся ли они къ нашей системѣ счисленія. Но мѣсто это вызываетъ еще другой вопросъ, который чаще всего и былъ именно обсуждаемъ: вопросъ о томъ, дѣйствительно ли,

[112]) Здѣсь находится въ рукописи пустое мѣсто. Могло бы годиться слово *sibi*.

[113]) Этотъ послѣдній стихъ относится къ цифрѣ 9. Но далѣе въ сочиненіи 9 называется *celentis*. Какая же причина этого двойнаго названія *Sipos* и *celentis*, которое встрѣчается также, какъ мы видѣли выше, и въ рукописи Боэція?

Въ этомъ новомъ сочиненіи, вслѣдъ за девятью цифрами, встрѣчаемъ, также какъ у Боэція, кружокъ, изображающій безъ сомнѣнія *нуль*. Не назначалось ли первоначально слово *sipos* для этого десятаго знака, къ которому оно очень идетъ? Въ такомъ случаѣ недостаетъ одного стиха для цифры 9—*celentis*.

Мы оставляемъ эти вопросы читателямъ, которымъ знаніе еврейскаго языка можетъ облегчить рѣшеніе.

какъ говоритъ Боэцій, система эта была извѣстна Пиѳагорейцамъ. Многіе писатели раздѣляли это мнѣніе [114]); но большинство не могло допустить, чтобы Греки знали систему счисленія, лучшую, чѣмъ ихъ собственная, и въ тоже время такъ мало цѣнили бы ея преимущества, что оставили ее въ совершенномъ забвеніи. Такое возраженіе весьма важно; и Монтукла, чтобы отстранить его, предполагаетъ, что здѣсь дѣло идетъ о Грекахъ позднѣйшаго времени, когда знанія и любовь къ наукамъ были уже въ упадкѣ. Предположеніе это можно допустить; но существуетъ ли необходимость прибѣгать къ нему? Мы думаемъ, что Монтукла сдѣлалъ это предположеніе только потому, что обыкновенно преувеличиваютъ различіе между системами счисленія Грековъ и Индѣйцевъ, также какъ и затруднительность первой изъ нихъ. Намъ кажется, наоборотъ, что эти двѣ системы очень мало разнятся одна отъ другой. Обѣ имѣютъ основаніемъ десятичную прогрессію и одинаковымъ образомъ изображаютъ всякое число черезъ единицы, десятки, сотни, тысячи и т. д., помощію девяти коренныхъ и основныхъ чиселъ: одинъ, два, три... девять, составляющимъ порядокъ единицъ и служащихъ къ составленію порядка десятковъ, сотенъ, тысячъ и т. д. Однимъ словомъ, та и другая система счисленія основываются на одной и той же формулѣ, выражающей составъ какого угодно числа; именно:

$$N = A.10^r + B.10^{r-1} + C.10^{r-2} + \dots + E.10^1 + F,$$

гдѣ каждое изъ основныхъ чиселъ $A, B, C, \dots E, F$ взято изъ девяти первыхъ чиселъ: одинъ, два, три... девять.

Въ чемъ же заключается дѣйствительное различіе между этими двумя системами счисленія? Въ той и въ другой

[114]) Conrad d'Asypodius, Isaac Vossius, Huet, Dom Calmet, Edouard Bernard, John Weidler, Ward, Bayer, Villoison, Montucla.

Въ началѣ нынѣшняго столѣтія явилось въ Италіи новое разсужденіе о занимающемъ насъ вопросѣ, подъ заглавіемъ: *Memorie sulle cifre arabiche.* (Milan, 1813 in 4°). Мы не могли еще достать себѣ этого сочиненія.

системѣ девять чиселъ порядка единицъ изображаются девятью особыми знаками, но Греки изображали девять чиселъ каждаго изъ слѣдующихъ порядковъ особыми новыми знаками, тогда какъ Индѣйцы употребляли для этого тѣ же первые девять знаковъ, значеніе которыхъ измѣнялось и указывалось занимаемыми ими мѣстами. Но такъ мѣста остаются тѣ же въ обѣихъ системахъ, то ясно, что вычисленія не должны были быть труднѣе въ одной системѣ нежели въ другой и такимъ образомъ не было особенно важнаго повода замѣнять греческую систему системою индѣйскою, хотя послѣдняя болѣе полна и болѣе научна. Такая замѣна могла бы быть сдѣлана математиками, но ее не легко бы было сдѣлать обязательною для всего народа. Доказательство этого находимъ у Римлянъ, система счисленія которыхъ чрезвычайно затрудняла всякія вычисленія, и не смотря на это, удержалась, хотя Римляне знали гораздо болѣе совершенную систему Грековъ.

Противъ мнѣнія, что Грекамъ была извѣстна индѣйская система, можетъ показаться съ перваго взгляда очень сильнымъ то возраженіе, что система Грековъ не давала возможности изображать очень большія числа (они останавливались на девяносто девяти милліонахъ) и что Архимедъ, чтобъ помочь этому недостатку, написалъ особую книгу *Principia* и пользовался найденнымъ имъ средствомъ въ книгѣ *Arenarius*. Если бы, говорятъ, въ пиѳагоровой школѣ знали индѣйскую систему, то она извѣстна бы была Архимеду и онъ не имѣлъ бы надобности искать новыхъ средствъ для изображенія большихъ чиселъ: ему достаточно бы было предложить эту самую систему. Если бы Архимедъ хотѣлъ дѣйствительно создать новую систему счисленія, то, безъ сомнѣнія, это значило бы, что онъ не зналъ системы Индѣйцевъ; но цѣль его была совсѣмъ не такова: онъ хотѣлъ найти средство выражать большія числа по системѣ самихъ Грековъ. Что же онъ сдѣлалъ для этого? Онъ приложилъ къ греческой системѣ, начиная съ того предѣла, гдѣ она переставала удовлетворять потребностямъ вычисленій, систему

индѣйскую, т. е. *значеніе положенія* цифръ. Неужели это доказательство, что Архимедъ не зналъ системы Индѣйцевъ? Можно ли даже сказать, что онъ не объ ней говорилъ въ недошедшей до насъ книгѣ *Principia*, которая относилась къ вопросу о счисленіи и въ которой прилагалось къ системѣ Грековъ начало измѣненія величины цифръ съ положеніемъ? Въ книгѣ *Arenarius* онъ не входитъ въ подробности, которыя находились въ *Principia*, потому что предметъ перваго сочиненія не состоялъ въ томъ, чтобы изображать большія числа, какъ это, кажется, иногда думаютъ; предметъ этой книги составляло единственно исчисленіе числа зеренъ песку, помѣщающагося въ сферѣ, описанной изъ солнца, какъ изъ центра, и обнимающей неподвижныя звѣзды. Опредѣливъ это число, онъ хотѣлъ изобразить его по системѣ счисленія Грековъ. Для этого-то онъ и предложилъ дать цифрамъ, находящимся далѣе осьмаго столбца, величины, различныя по положенію, точно также, какъ въ индѣйской системѣ.

Изъ незначительнаго числа документовъ мы не можемъ узнать, какъ именно отмѣчалось то мѣсто, начиная съ котораго измѣнялось значеніе цифръ съ положеніемъ. Дѣлалось ли это посредствомъ особаго знака? или требовалось, чтобы первые восемь столбцовъ были необходимо заняты? это показывало бы, что въ греческой системѣ было введено употребленіе нуля, въ какомъ бы то ни было видѣ, напр. въ видѣ точки, пустаго мѣста или столбца. Впрочемъ мы знаемъ, что нуль былъ извѣстенъ Грекамъ и что они его употребляли, когда нужно было показать отсутствіе градусовъ или минутъ и пр. при ихъ вычисленіяхъ съ дробями, имѣющими знаменателемъ степени числа шестьдесятъ [115]).

Всѣ эти изслѣдованія не превышали силъ Архимедова генія; но ничто, кажется, не даетъ намъ права сказать, что онъ не могъ почерпнуть этого принципа изъ знанія индѣй-

---

[115]) См. Delambre *Mémoire sur l'arithmétique des Grecs.*

ской системы; или что, зная эту систему, онъ поступилъ бы иначе въ своей книгѣ *Arenarius*.

Но, скажутъ, Аполлоній, послѣ Архимеда, занимался также усовершенствованіемъ греческой системы счисленія; онъ замѣнилъ четырьмя столбцами *октады*, т. е. группы въ восемь столбцовъ Архимеда; если бы онъ зналъ индѣйскую систему, то приложилъ бы со втораго же столбца принципъ измѣненія величины съ положеніемъ, который онъ примѣнилъ къ пятому столбцу.

Но, чтобы судить о сочиненіи Аполлонія, которое до насъ не дошло, и изъ котораго намъ извѣстны только результаты по отрывочнымъ указаніямъ Паппа, надобно знать почему онъ остановился именно на четырехъ, а не на трехъ или пяти столбцахъ. Причина этого, какъ намъ кажется, заключалась въ слѣдующемъ. Греки имѣли тридцать шесть цифръ для выраженія всѣхъ чиселъ, состоящихъ изъ четырехъ столбцовъ, какъ напр. 2354. Двадцать семь первыхъ цифръ были различныя буквы ихъ алфавита; девять слѣдующихъ, выражавшихъ тысячи, были девять цифръ единицъ, отмѣченныя знакомъ *iota* или знакомъ ударенія. Тѣже тридцать шесть цифръ служили для означенія чиселъ далѣе простыхъ тысячъ до осьмаго столбца исключительно; начиная съ пятаго столбца, цифры эти означали миріады и надъ ними ставилась, для означенія миріадъ, буква M или же послѣ нихъ и также передъ четвертымъ столбцомъ ставились буквы M*υ*. Знаки эти были неудобны: они осложняли вычисленія и могли порождать ошибки; Аполлоній захотѣлъ ихъ устранить. Для этого онъ изобрѣлъ группы въ четыре столбца и ввелъ измѣненіе значенія цифръ съ положеніемъ.

Въ этой идеѣ Аполлонія, также какъ въ идеѣ Архимеда, мы видимъ намѣреніе сохранить въ неприкосновенности цифры, употреблявшіяся у Грековъ, также какъ и значеніе ихъ, и примѣнить ихъ къ выраженію всевозможныхъ чиселъ. Мы видимъ, что оба эти великіе геометра вполнѣ достигли этой цѣли, примѣнивъ къ цифрамъ измѣненіе ве-

личины съ положеніемъ на основаніи именно индѣйской системы счисленія.

Доказываетъ ли это, что имъ была совершенно неизвѣстна индѣйская система?

Прибавленіе. Доказываетъ ли это, что имъ была совершенно неизвѣстна индѣйская система? Запоздавъ нашею работой, мы, къ сожалѣнію поспѣшили редакціею этой фразы для печати и неосмотрительно употребили выраженіе *индѣйская система* вмѣсто того, чтобы сказать *система abacus'a.* Очевидно, что мы имѣли въ виду показать только, что указаніе Боэція не заключаетъ въ себѣ ничего невозможнаго; т. е., что излагаемая имъ система нумераціи могла быть извѣстна, какъ онъ говоритъ, пиѳагорейцамъ; система эта, повторяемъ, не была въ точности системою Индѣйцевъ, т. е. нашею современною: она отличалась отъ нея отсутствіемъ *нуля* и неизбѣжнымъ употребленіемъ *столбцовъ* для назначенія мѣста цифръ.

Въ сущности система эта была ничто иное, какъ письменное изображеніе *счетной доски* (*table à compter*), извѣстной у Римлянъ подъ именемъ *Abacus*; она состояла изъ параллельно натянутыхъ шнурковъ, на каждомъ изъ которыхъ можно было передвигать девять шариковъ для составленія группъ, изображающихъ числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9; шнурки изображали свойство единицъ каждой группы: первый шнурокъ означалъ простыя единицы, второй десятки, третій сотни и такъ далѣе.

Мы видимъ, что *письменный Abacus* (*Abacus figuré*) былъ то же самое что и *ручной Abacus* (*Abacus manuel* ou *palpable*); столбцы въ немъ представляли шнурки, а девять знаковъ (или цифръ) изображали группы, которыя можно было составлять изъ девяти шариковъ на каждомъ шнуркѣ.

Такимъ образомъ переходъ отъ *ручнаго Abacus*, а къ *письменному* былъ весьма естественъ и не требовалъ никакого геніальнаго усилія; никто не отказался бы приписать этотъ переходъ Римлянамъ, еслибъ Боэцій не приписывалъ его Пиѳагору. И только имя Пиѳагора было въ глазахъ нѣкоторыхъ поводомъ къ самому сильному возраженію противъ нашего изъясненія текста Боэція; и это потому, что не хотятъ допустить, что Архимеду и Аполлонію извѣстна была система счисленія, которая могла дать имъ мысль о измѣненіи *величины цифръ съ положеніемъ.*

Но многіе писатели думали, что Греки, уже во времена Пиѳагора, знали *счетную машину*, которую мы описали у Римлянъ подъ именемъ *Abacus;* на томъ основаніи, что эта машина извѣстна съ самой глубокой древности у всѣхъ народовъ *). Но подобная машина, какъ замѣчаетъ знаменитый Гумбольтъ, **) основывается на *значеніи положенія* знаковъ изображающихъ числа. Она должна была, также какъ и *письменный Abacus*, описанный Боэціемъ, дать Архимеду и Аполлонію мысль о *значеніи положенія*, мысль, которая во всякомъ случаѣ была извѣстна этимъ двумъ великимъ геометрамъ, потому что они, какъ мы уже сказали, приложили ее, первый— къ своимъ *октадамъ*, второй къ своимъ *тетрадамъ*.

О мѣстѣ Геометріи Боэція, относящемся къ правильному пятиугольнику втораго рода. — Происхожденіе и развитіе звѣздчатыхъ многоугольниковъ.

Боэцій въ первой книгѣ своей Геометріи, которая есть переводъ предложеній изъ четырехъ первыхъ книгъ Эвклида, даетъ только изложеніе каждой теоремы или задачи и соотвѣтствующій чертежъ.

Послѣднее предложеніе, взятое у Эвклида, есть задача: вписать въ кругѣ правильный пятиугольникъ (предложеніе XI четвертой книги Эвклида;) послѣ изложенія этой задачи слѣдуетъ, по обыкновенію, соотвѣтствующій чертежъ, замѣ-

---

*) Машина эта есть *suanpan* Китайцевъ. Она была въ употребленіи не только въ большой части Азіи, но и во многихъ другихъ странахъ, какъ-то у Этрусковъ, въ Египтѣ, въ Перу. См. мемуаръ Александра Гумбольта въ IV томѣ Математическаго Журнала Крелля, стр. 205: *Ueber die bei verschiedenen Völkern üblichen Systeme von Zahlzeichen und über den Ursprung des Stellenwerthes in den indischen Zahlen.*

Машина эта, китайская или римская, изображена во многихъ сочиненіяхъ. (См. Velser, *Rerum augustanarum vindelicarum libri octo*, Venetiis, 1593, in-fol; p. 268.—La Loubère, *Du royaume de Siam*, Paris, 1691, 2 vol. in-12.—Du Molinet, *Le cabinet de la bibliothèque de S-te Genevieve*, Paris, 1692, in-fol, p. 23.—Hager, *An Explanation of the Elementary Characters of the Chinese*; Lond., 1801, in-fol.)

**) См. вышеприведенный мемуаръ Гумбольта.

чательный тѣмъ, что на немъ вмѣстѣ съ обыкновеннымъ пятиугольникомъ изображенъ пятиугольникъ *звѣздчатый*, или *втораго рода*.

Кромѣ того, послѣ чертежа, находимъ объясненіе, чего не встрѣчаемъ послѣ другихъ предложеній, и оно, кажется, имѣетъ цѣлію показать значеніе этой двойной фигуры, или, лучше сказать, того новаго пятиугольника, который предлагается, какъ соотвѣтствующій задачѣ.

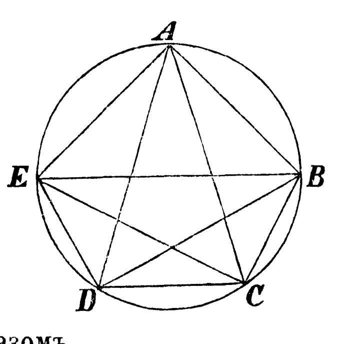
Это мѣсто у Боэція понять довольно трудно и мы можемъ легко ошибиться въ предлагаемомъ нами изъясненіи его; поэтому мы здѣсь выпишемъ его, слѣдуя тексту рукописи, гораздо болѣе правильной, чѣмъ Базельское изданіе (1570 г.)

«*Intra datum circulum, quinquangulum quod est aequila-* «*terum atque aequiangulum designare non disconvenit.*»

Здѣсь находится чертежъ соотвѣтствующій вопросу и авторъ продолжаетъ:

«*Nam omnia quaecumque sunt numerorum ratione sua* «*constant; et proportionaliter alii ex aliis constituuntur. Ci-* «*rcumferentiae aequalitate multiplicationibus suis quidem* «*excedentes; atque alternatim portionibus suis terminum fa-* «*cientes.*"

Надобно вписать въ кругъ равносторонній и равноугольный пятиугольникъ.



Соотвѣтствующій чертежъ представляетъ два пятиугольника, изъ которыхъ одинъ имѣетъ новую форму и по этому отличается отъ обыкновеннаго пятиугольника. Боэцій оправдываетъ это слѣдующимъ образомъ.

Ибо все, что выражено въ числахъ, существуетъ, какъ слѣдствіе самихъ чиселъ; числа же выводятся пропорціонально одни изъ другихъ.

Дуги [116]) *увеличиваются на количество равное имъ самимъ посредствомъ удвоенія и хорды их* [117]), *взятыя попарно, составляютъ периметръ* [118]) *фигуры.*

Если можно допустить такой переводъ текста Боэція, то, по нашему мнѣнію, онъ соотвѣтствуетъ построенію звѣздчатаго пятиугольника. Дѣйствительно, пусть A, B, C, D, E, будутъ пять вершинъ обыкновеннаго правильнаго пятиугольника. Дуги, стягиваемыя его сторонами, суть AB, BC, CD, DE, EA. Если ихъ удвоимъ, то получимъ ABC, BCD, CDE, DEA, EAB; хорды ихъ будутъ AC, BD, CE, DA, EB. Возьмемъ эти хорды попарно, будемъ имѣть AC, CE, EB, BD, DA и въ этомъ порядкѣ онѣ образуютъ звѣздчатый пятиугольникъ.

Впрочемъ нѣтъ ничего удивительнаго, что фигура эта встрѣчается у Боэція, потому что весьма вѣроятно, какъ мы покажемъ это ниже, она извѣстна была въ древности, именно Пиѳагору; кромѣ того ее находимъ въ XIII вѣкѣ въ комментаріѣ Кампана къ Эвклиду; впродолженіе трехъ или четырехъ столѣтій теорія звѣздчатыхъ многоугольниковъ, называвшихся въ то время *polygonum egrediens*, была разрабатываема и получила даже нѣкоторое развитіе. Впослѣдствіи она была брошена и оставалась неизвѣстною, такъ какъ безъ пособія алгебраическаго анализа она представляетъ только предметъ для любопытства и не приноситъ ни-

---

[116]) *Circumferentia* во многихъ другихъ мѣстахъ у Боэція есть названіе *дугъ* круга.

[117]) Мы переводимъ *portionibus* словомъ *хорда*, потому что *portio* есть названіе круговаго *сегмента*, который у Римлянъ не имѣлъ другаго названія. (*Portio circuli est figura quae sub recta et circuli circumferentia continetur.*) Мы предполагаемъ, что Боэцій далъ здѣсь части названіе цѣлаго, т. е. назвалъ *хорду сегментомъ*, такъ какъ для *хорды* не было тогда простаго названія; ее называли *linea inscripta*.

[118]) Римляне называли словомъ *terminus* конецъ линіи и также *периметръ* многоугольника и вообще какой нибудь фигуры. (*Figura est quod sub aliquo vel aliquibus terminis continetur.* Опредѣленіе Боэція.)

какой существенной пользы для геометріи. Но знаменитый геометръ, возсоздавшій эту теорію въ началѣ нынѣшняго вѣка, и давшій ей свое имя, придалъ ей значеніе, котораго она не можетъ болѣе потерять, показавъ ея истинный научный характеръ и аналитическую связь, необходимо и неразрывно соединяющую ее съ многоугольниками древнихъ [119]).

Тѣмъ не менѣе теорія эта приноситъ честь среднимъ вѣкомъ, гдѣ намъ такъ рѣдко приходится встрѣтить слѣды генія и какіе нибудь зародыши плодотворныхъ нововведеній. Вотъ почему мы укажемъ здѣсь все найденное нами по этому предмету въ исторіи эпохи, отъ которой остались только очень рѣдкіе документы.

Прежде всего скажемъ, на чемъ основано наше мнѣніе, что звѣздчатый пятиугольникъ былъ разсматриваемъ въ древности, въ особенности Пиѳагоромъ.

Въ Энциклопедіи Алстедія [120]) въ XV книгѣ, гдѣ говорится о геометріи, находимъ, тотчасъ послѣ построенія обыкновеннаго правильнаго пятиугольника, слѣдующее мѣсто:

«*Pentagonum etiam ita scribitur, et a superstitiosis nota*-«*tur hoc nomine Jesus*»

(Здѣсь находится фигура звѣздчатаго пятоугольника съ буквами *i*, *e*, *s*, *u*, *s* при пяти вершинахъ.)

«*Si pentagono ita constructo addas lineam ex superiori* «*angulo in oppositum angulum ductam, fiet illa figura,* «*quam vocant sanitatem Pythagorae; quia Pythagoras, hac* «*figura delectatus, adscribebat singulis prominentibus angu*-«*lis has quinque litteras* υ, γ, ι, ϑ, α. *Germani vocant ein* «*Trudenfuss: quia sacerdotes veteres Germanorum et Gal*-«*lorum vocabantur Druidae: qui dicuntur calacos* (можетъ «быть *calceos*) *hujus figurae gestasse.*»

---

[119]) См. Poinsot *Mémoire sur les polygones et les polyèdres*, article 15. (*Journal de l'école polytechnique;* X-e cahier, t. 4.)

[120]) *Encyclopaedia universa.* Herbornae, 1620, in 4^0.—Также *Secunda aucta*, ibid. 1630, in—fol, 2 vol.—Тоже Lucduni, 1649, in—fol, 2 vol.

Кирхеръ, въ своей *Arithmologia* [121]) (pars V, *De Magicis amuletis)*, говоритъ въ томъ же смыслѣ о звѣздчатомъ пятиугольникѣ, который онъ называетъ *pentalpha*, потому что двѣ смежныя стороны вмѣстѣ съ стороною ихъ пересѣкающею образуютъ букву A. Вершины онъ означаетъ буквами υ, γ, ι ϑ, α. Вотъ слова этого автора: «*In quibus (si*«*gillis magicis) nil frequentius occurit, quam pentalpha et* «*hexalpha; est autem pentalpha nil aliud, quam linearis* «*figura in quinque* A *diductum, quibus* υ γ ι ϑ α *Graeci id est* «*salutatem et sanitatem exprimebant; quo Antiochum vexillo* «*imposito, jussu Alexandri in somno apparentis, mox admi*«*rabilem a Galatis victoriam reportasse Magi fingunt, eoque* «*tanquam summae felicitatis symbolo in suis nugamentis* «*utuntur.*»

Послѣ этого Кирхеръ приводитъ различныя таинственныя обстоятельства, при которыхъ употреблялся этотъ *pentalpha.*

Въ XVI вѣкѣ знаменитый алхимикъ Парацельсъ разсматривалъ также пятиугольную звѣзду, какъ эмблему здравія [122]).

Изъ математической библіотеки Мургарда узнаемъ что профессоръ Кестнеръ говорилъ о *pentalpha* и *hexalpha* въ своемъ сочиненіи *Geometrische Abhandlunden (Erste Sammlung, Anwendungen der ebenen Geometrie und Trigonometrie.* Göttinden, 1790, in—8⁰).

Переходимъ собственно къ теоріи звѣздчатыхъ многоугольниковъ.

Первые слѣды ея находимъ въ комментаріяхъ Кампана, геометра XIII вѣка, которыя онъ присоединилъ къ своему переводу элементовъ Эвклида, сдѣланному съ арабскаго текста и первому въ Европѣ по времени появленія. По пово-

---

[121]) *Arithmologia, sive de abditis numerorum mysteriis, quà origo, antiquitas, et fabrica numerorum èxponitur*, etc., Romae, 1665, in 4⁰.

[122]) „.... *Stellam pentagonicam, seu Germanico idiomate pedem Truttae, Theophrasto Paracelso signum sanitatis.*“ (Kepler, *Harmonices Mundi*, liber secundns, p. 60.)

ду тридцать девятаго предложенія первой книги, гдѣ говорится, что сумма угловъ треугольника равна двумъ прямымъ, Кампанъ представляетъ звѣздчатый пятиугольникъ, какъ примѣръ многоугольника, раздѣляющаго съ треугольникомъ это свойство, т. е. имѣющаго также сумму угловъ равную двумъ прямымъ. Предложеніе это было воспроизведено Замберти въ его изданіяхъ Эвклида, гдѣ вмѣстѣ съ комментаріями издателя помѣщены также комментаріи Кампана [123]); различные другіе писатели также ввели это предложеніе въ своихъ комментаріяхъ къ элементамъ Эвклида, таковы Лука Бурго [124]), Пелетье [125]) и Клавій [126]). Рамусъ, въ своихъ *Scholae mathematicae* [127]), книга IX, также приводитъ звѣздчатый пятиугольнткъ, какъ примѣръ фигуры, въ которой сумма угловъ, также какъ и въ треугольникѣ, равна двумъ прямымъ [128]),

Но всѣ эти геометры, подобно Боэцію и Кампану, ограничивались разсмотрѣніемъ звѣздчатаго пятиугольника, не давая даже подозрѣвать теоріи, къ которой могутъ вести этого рода фигуры. Мы находимъ, что одинъ писатель начала XIV вѣка Брадвардинъ первый распространилъ теорію

---

[123]) Комментаріи Кампана были напечатаны одни въ 1482 и 1491 годахъ, потомъ вмѣстѣ съ комментаріями Замберти въ 1505, 1516, 1537, 1546.

[124]) *Euclidis opera a Campano interprete fidissimo translata. Lucas Paciolus, theologus insignis, altissima mathematicarum disciplinarum scientia rarissimus judicio castigatissimo detersit, emendavit*, etc. Venetiis, 1509, in-fol.

[125]) *Demonstrationum in Euclidis Elementa Geometrica, libri sex.* Lyon, 1557, in 8⁰.—Item, 1610, in—4⁰.—*Les six premiers livres des élemens geométriques d'Euclide, avec les démonstrations de Jacques Pelletier, du Mans.* Genève, 1828, in—8⁰.

[126]) *Euclidis elementorum, libri XV; accessit XVI de solidorum regularium compatione*, etc. Romae, 1574, in—8⁰. Имѣло очень много изданій.

[127]) *Scolarum mathematicarum, libri XXXI.* Francf. 1559, in 4⁰.—Item, Basileae, 1569.—Item, Francf. 1599.—Item, ibid., 1627.

[128]) *Sic quinquangulum e continuatis ordinatis quinquanguli lateribus factum aequat quinque interiores angulos duobus rectis.*

звѣздчатаго пятиугольника на многоугольники съ большимъ числомъ сторонъ и основалъ истинное ученіе о звѣздчатыхъ многоугольникахъ.

Сочиненіе, въ которомъ изложена эта теорія носитъ слѣдующіе заглавіе: *Geometria speculativa Thomae Bradvardini, recoligens omnes conclusiones geometricas studentibus artium, et philosophiae Aristotelis, valde necessarias, simul cum quodam tractatu de quadratura circuli; noviter edita.* Parisiis, apud Redinaldum Chauldiere, in—fol.,—двадцать листовъ, безъ означенія года изданія. Первое изданіе этой геометріи было въ 1496 году [129]); многія другія изданія явились въ 1505, 1508 и пр. [130]). Намъ неизвѣстенъ годъ вышеупомянутаго изданія.

Изложивъ ученіе объ обыкновенныхъ правильныхъ многоугольникахъ, которые онъ называетъ *простыми* фигурами, Брадвардинъ посвящаетъ главу *звѣздчатымъ* многоугольникамъ, которые онъ называетъ *фигурами съ выдающимися углами* (à angles égrédiens). Онъ говоритъ, что *многоугольники эти образуются чрезъ продолженіе сторонъ простаго многоугольника до встрѣчи ихъ другъ съ другомъ*, и прибавляетъ, что ему неизвѣстно, говорилось ли кѣмъ нибудь изъ геометровъ объ этихъ новыхъ фигурахъ, кромѣ Кампана, который упомянулъ о нихъ мимоходомъ и въ немногихъ словахъ.

Вотъ обзоръ этой части сочиненія Брадвардина.

Пятиугольникъ есть первая фигура съ выдающимися углами. Сумма его угловъ равна двумъ прямымъ. Сумма угловъ въ другихъ многоугольникахъ съ выдающимися углами идетъ возрастая и начинаясь съ двухъ прямымъ, также какъ и въ простыхъ фигурахъ.

Это согласно съ формулою $s+2(m-4)$, которая опредѣляетъ сумму угловъ въ многоугольникѣ съ выдающимися углами, имѣющемъ m сторонъ.

---

129) Heilbronner, *Historia Matheseos*, p. 523.

130) Montucla, *Histoire des mathématiques*, t. I, p. 573.

Выдающіеся многоугольники *перваго рода* при продолженіи ихъ сторонъ до встрѣчи другъ съ другомъ образуютъ выдающіеся многоугольники *втораго рода*, точно также какъ изъ простыхъ многоугольниковъ получаются выдающіеся перваго рода.

Семиугольникъ есть первая фигура съ выдающимися углами втораго рода; онъ происходитъ изъ семиугольника съ выдающимися углами перваго рода, который самъ есть третья фигура перваго рода.

Подобнымъ же образомъ выдающійся пятиугольникъ, представляющій первую фигуру перваго рода, былъ полученъ изъ простаго пятиугольника, который занимаетъ третье мѣсто въ ряду простыхъ многоугольниковъ. Изъ этой аналогіи Брадвардинъ вывелъ слѣдующее общее правило: *первая фигура какого нибудь рода получается отъ продолженія сторонъ третьей фигуры предыдущаго рода.*

Въ концѣ авторъ говоритъ, что было бы слишкомъ долго изслѣдовать углы этихъ фигуръ и что онъ думаетъ, хотя и не можетъ утверждать, что въ первой фигурѣ каждаго рода сумма угловъ равна двумъ прямымъ, въ другихъ же идетъ постоянно возрастая отъ одной фигуры къ слѣдующей.

На поляхъ сочиненія изображены: пятиугольникъ, шестиугольникъ, семиугольникъ и восьмиугольникъ перваго рода; семиугольникъ, восьмиугольникъ и девятиугольникъ втораго рода; наконецъ девятиугольникъ и двѣнадцатиугольникъ третьяго рода.

Черезъ два вѣка послѣ Брадвардина, Charles de Bouvelles, о которомъ упоминаютъ обыкновенно только по поводу его ошибочнаго рѣшенія вопроса о квадратурѣ круга, помѣстилъ теорію выдающихся многоугольниковъ въ разныхъ изданіяхъ своей геометріи [131]), впрочемъ не въ такомъ полномъ видѣ, какъ изложилъ ее Брадвардинъ. Въ его сочине-

[131]) *Geometriae introductionis libri sex, brevisculis annotationibus explanati, quibus annectuntur libeli de circuli quadratura, et de cubicatione sphaerae, et introductio in perspectivam Caroli Bovilli.* Paris. 1503, in—fol.

ніи находимъ выдающійся пятиугольникъ (который онъ называетъ также *saillant*) съ доказательствомъ, что сумма пяти угловъ его равна двумъ прямымъ; выдающійся шестиугольникъ, составленнный изъ двухъ треугольниковъ; выдающійся семиугольникъ, происходящій отъ продолженія сторонъ простаго семиугольника; наконецъ семиугольникъ *болѣе выдающійся* (plus égrédient), образуемый продолженіемъ сторонъ выдающагося семиугольника и отличающійся тѣмъ, что сумма угловъ его, какъ доказываетъ авторъ, равна двумъ прямымъ.

Указаніе на эту теорію встрѣчается въ извлеченіи изъ геометріи de Bouvelles' я, напечатанномъ въ *Appendices* къ *Margarita philosophica* [132]).

Эти первыя понятія о теоріи звѣздчатыхъ многоугольниковъ прошли незамѣченными, какъ въ многочисленныхъ изданіяхъ *Margarita philosophica*, такъ и въ изданіяхъ геометріи de Bouvelles' я, о которой говорилось только по поводу и подъ вліяніемъ ложнаго рѣшенія задачи о вписываніи въ кругъ правильнаго семиугольника и ложной квадратуры круга, которая была заимствована у кардинала Кузы (Nicolas De Cusa).

Въ сочиненіи о перспективныхъ фигурахъ Даніила Барбаро [133]) находимъ звѣздчатые пятиугольникъ, шестиуголь-

---

Сочиненіе это, за исключеніемъ *introductio in perspectivam*, было переведено на французскій языкъ подъ заглавіемъ: *Livre singulier et utile, touchaut l'art et pratique de Géométrie, composé nouvellement en françois, par maître Charles de Bouvelles, chanoine de Noyon*, Paris, 1542, in 4⁰. Другія изданія были въ 1547, 1551, 1557 и 1608 годахъ.

Bouvelles написалъ много другихъ сочиненій, въ которыхъ онъ является философомъ, богословомъ, историкомъ, ораторомъ, поэтомъ и правовѣдомъ.

[132]) См. стр. 1231, 1233 и 1235 изданія 1535 года. „*Pentagonus uniformis dicitur, cujus latera non se mutuo intercidunt. Egrediens vero cum ejus latera se invicem secant. Hexagonus....*“

[133]) *La pratica della perspettiva di monsignor Daniel Barbaro*, Venise, 1569, in—fol.

никъ и два семиугольника. Но авторъ, кажется не имѣлъ намѣренія производить этихъ новыхъ многоугольниковъ: онъ хотѣлъ только показать, что изъ обыкновенныхъ правильныхъ многоугольниковъ можно получить двумя способами другіе подобные имъ многоугольники. Первый способъ состоитъ въ продолженіи сторонъ до встрѣчи ихъ другъ съ другомъ попарно (также какъ и для образованія многоугольника втораго рода): точки встрѣчи будутъ вершинами другаго многоугольника, подобнаго съ даннымъ. Второй способъ состоитъ въ проведеніи всѣхъ діагоналей, идущихъ изъ каждой вершины во вторую или третью сосѣднюю вершину: діагонали эти своимъ пересѣченіемъ образуютъ другой многоугольникъ, также подобный данному. Помощію этихъ двухъ построеній получаются также и звѣздчатые многоугольники, которые и составляютъ собственно самую замѣчательную часть чертежа.

Кирхеръ, о которомъ мы уже говорили по поводу *pentalpha* и *hexalpha*, вводитъ въ своемъ другомъ сочиненіи [134]) семиугольникъ втораго рода (или третьяго вида), чтобъ нагляднѣе представить объясненіе, заключающееся въ замѣчательномъ мѣстѣ у Діона Кассія, по поводу семи дней недѣли, посвященныхъ Египтянами тѣмъ самымъ богамъ, по имени которыхъ названы были семь планетъ. Планеты эти, въ порядкѣ ихъ разстоянія отъ земли, суть: Сатурнъ, Юпитеръ, Марсъ, Солнце, Венера, Меркурій и Луна. Кирхеръ располагаетъ ихъ въ этомъ порядкѣ на окружности круга и, переходя послѣдовательно отъ первой до четвертой, отъ четвертой къ седьмой, отсюда къ третьей и т. д., онъ получаетъ фигуру, которую называетъ семиугольникомъ (это будетъ семиугольникъ третьяго вида); послѣдовательныя вершины будутъ означать тогда семь дней недѣли въ ихъ дѣйствительномъ порядкѣ. Именно: Сатурнъ будетъ соотвѣтствовать субботѣ, Солнце—воскресенью, Луна—понедѣль-

---

[134]) *Ars magna lucis et umbrae in decem libros digesta*, Romae, 1646, in—fol. p. 217 et 537.

нику, Марсъ-вторнику, Меркурій-середѣ, Юпитеръ-четвергу и Венера-пятницѣ. Составленіе этого семиугольника, говоритъ Кирхеръ, выражаетъ собою прекрасное свойство числа семь.

Сочиненія, о которыхъ мы говорили до сихъ поръ, уже очень давно забыты, хотя авторы ихъ пользовались нѣкоторою извѣстностью. Дѣйствительно сочиненія эти не отличались геніальнымъ творчествомъ, которое увѣковѣчиваетъ и сочиненіе и автора, и въ созданіяхъ котораго мы, даже по истеченіи вѣковъ, охотно отыскиваемъ мысль изобрѣтателя и слѣды его усилій. Нисколько поэтому неудивительно, что многоугольники Боэція и Кампана и теорія Брадвардина въ настоящее время неизвѣстны. Но теперь мы должны указать въ исторіи этого вопроса на имя знаменитое, на сочиненіе достопамятное, на одно изъ тѣхъ рѣдкихъ открытій, которыя составляютъ славу новѣйшихъ временъ, наконецъ на аналитическія соображенія, которыя, два вѣка тому назадъ, должны были произвести глубокое впечатлѣніе на умы геометровъ. Но Кеплеръ опередилъ свой вѣкъ и мы говоримъ теперь о немъ, о его сочиненіи *Гармонія міровъ* [135]), о его прекрасномъ предложеніи объ *отношеніи квадратовъ временъ обращеній къ кубамъ разстояній отъ солнца* и о другомъ его предложеніи, совершенно инаго рода, состоящемъ въ томъ, что *различные виды многоугольниковъ съ одинаковымъ числомъ сторонъ опредѣляются изъ однаго и того же уравненія*. Теперь можно бы подумать, что ни одна новая мысль не являлась при обстоятельствахъ столь благопріятныхъ, по видимому, для быстраго обезпеченія за авторомъ прочной славы. Однако глубоко-ученая теорія Кеплера была забыта и отъ его безсмертнаго сочиненія остался извѣстнымъ только великій законъ движенія небесныхъ тѣлъ; даже этотъ законъ не былъ признанъ и былъ, можетъ быть, пренебрегаемъ его современниками, въ числѣ которыхъ мы къ сожалѣнію должны назвать Декарта и Галилея; необходимо было, чтобы Ньютонъ, черезъ восемьдесять лѣтъ послѣ этого, изъяснилъ этотъ

---

[135]) *Harmonices Mundi, libri* V. Lincii Austriae, 1619 in fol.

законъ, заставилъ его понять и снова придалъ ему жизнь [136])! Теорія многоугольниковъ, руководствовавшая Кеплеромъ въ его долгихъ и трудныхъ изысканіяхъ, была принята еще менѣе благосклонно; къ ней не отнеслись даже съ простымъ любопытствомъ, ничто не могло спасти ее отъ совершеннаго забвенія. Это напоминаетъ намъ печальное размышленіе Бальи, высказанное именно по поводу законовъ Кеплера: „Итакъ напрасно открываютъ истины: вы говорите для своихъ современниковъ, а они не слушаютъ васъ!“ Нѣтъ, не напрасно; но истины новыя бываютъ слишкомъ часто назначены только для будущаго.

Сочиненіе Кеплера состоитъ изъ пяти книгъ. Первая подъ заглавіемъ: *De figurarum regularium, quae proportiones harmonicas pariunt ortu, classibus, ordine et differentiis, causa scientiae et demonstrationis*, посвящена общей теоріи правильныхъ фигуръ; въ ней же, какъ частный случай, заключаются *звѣздчатые* многоугольники.

Во вступленіи Кеплеръ упрекаетъ Рамуса за то, что тотъ критиковалъ X книгу Евклида и хотѣлъ выкинуть ее изъ геометріи. Онъ предлагаетъ пополнить ее изслѣдованіемъ правильныхъ многоугольниковъ, которые не могутъ быть вписаны въ кругъ *геометрически* и указаніемъ на различіе ихъ отъ тѣхъ, которые могутъ быть вписаны. Онъ обѣщаетъ писать объ этой геометрической статьѣ какъ философъ болѣе яснымъ, удобопонятнымъ и общедоступнымъ образомъ, чѣмъ это дѣлалось до тѣхъ поръ.

---

[136]) Кеплеръ какъ бы предвидѣлъ, что его открытія, стоившія ему семнадцати лѣтъ постояннаго труда, будутъ поняты только послѣ долгаго времени.

„Жребій брошенъ! говоритъ этотъ великій человѣкъ съ выраженіемъ „энтузіазма, я пишу книгу, которая будетъ прочитана теперь или въ „потомствѣ, это все равно: пусть ждетъ она читателя хотя бы сто „лѣтъ; развѣ Богъ не ожидалъ шесть тысячъ лѣтъ созерцателя своихъ „твореній?“ (*Jacio in aleam, librumque scribo, seu praesentibus, seu posteris legendum; nihil interest: expectat ille suum lectorem per annos centum. Si Deus ipse per annorum sena millia contemplatorem ptaestolatus est. Harmonices Mundi, lib.* V, p. *179.*)

Книга начинается многочисленными опредѣленіями, необходимыми для пониманія сочиненія; мы приведемъ изъ нихъ два или три.

Правильныя фигуры суть тѣ, которыя имѣютъ равныя стороны и равные углы.

Ихъ различаютъ на два класса. Однѣ суть *первоначальныя и коренныя* (*primaires et radicales*)—это обыкновенные правильные многоугольники; другіе суть *звѣздчатые*, образуемые изъ *коренныхъ* чрезъ продолженіе сторонъ [137]).

Вписать фигуру въ кругъ значитъ посредствомъ *геометрическаго* построенія (т. е. при помощи прямой линіи и круга) опредѣлить отношеніе стороны ея къ діаметру круга.

Затѣмъ Кеплеръ припоминаетъ многія предложенія X книги Евклида, которыя ему нужны будутъ впослѣдствіи. Съ тридцать пятаго предложенія онъ начинаетъ изслѣдованіе различныхъ правильныхъ многоугольниковъ, разсматривая сперва тѣ, которые могутъ быть вписаны въ кругъ геометрически.

Изъ звѣздчатыхъ многоугольниковъ этого рода здѣсь находятся: пятиугольникъ втораго вида, восьмиугольникъ и десятиугольникъ третьяго вида, двѣнадцатиугольники третьяго и пятаго видовъ, пятнадцатиугольники втораго, четвертаго и шестаго вида и наконецъ звѣзды изъ 24 сторонъ пятаго, седьмаго и одиннадцатаго видовъ.

Переходя къ многоугольникамъ, которые не могутъ быть вписаны въ кругъ геометрически, онъ доказываетъ, что обыкновенный и два звѣздчатые семиугольника принадлежатъ къ этому числу. Послѣ этого онъ прибѣгаетъ къ анализу, но вскорѣ же упрекаетъ его за то, что онъ не болѣе искусенъ и ничему его не научилъ. Въ этомъ мѣстѣ находимъ нѣсколько аналитическихъ замѣтокъ, которыя должны бы были предохранить сочиненіе Кеплера отъ забвенія.

---

[137]) Кеплеръ не говоритъ, принадлежитъ ли эта мысль о звѣздчатыхъ многоугольникахъ ему самому, или была заимствована имъ изъ какого нибудь древнѣйшаго сочиненія.

„Въ возраженіе, говоритъ онъ (стр. 34), мнѣ укажутъ на „аналитическое искусство, которое арабъ Геберъ назвалъ „*алгеброй*, а Итальянцы называютъ *Cossa*: такъ какъ стороны „всякаго рода многоугольниковъ повидимому могутъ быть „опредѣлены этимъ способомъ.

„Такъ, напримѣръ, для семиугольника Jobst Byrge, изобрѣтшій въ этомъ родѣ вещи весьма остроумныя и даже невѣроятныя, поступаетъ слѣдующимъ образомъ.... " и т. д.

Посредствомъ геометрическихъ соображеній, Кеплеръ ищетъ выраженіе стороны правильнаго семиугольника, вписаннаго въ кругъ, въ функціи радіуса и приходитъ къ такому уравненію:

7 — 14 *ij* + 7 *iiij* — 1 *vj aeque valent figurae nihili*,

или по нашему теперешнему обозначенію

$$7 - 14\,x^2 + 7\,x^4 - x^6 = 0,$$

гдѣ x есть отношеніе стороны семиугольника къ радіусу круга.

„Величина корня такого уравненія, говоритъ онъ, не „единственна; именно ихъ двѣ для пятиугольника, три для „семиугольника, четыре для девятиугольника и такъ далѣе."

Онъ прибавляетъ (для случая семиугольника), что три корня представляютъ стороны трехъ различныхъ семиугольниковъ, которые могутъ быть вписаны въ одномъ и томъ же кругѣ.

Въ этомъ мы видимъ совершенно ясное истолкованіе трехъ корней уравненія, опредѣляющаго сторону правильнаго вписаннаго въ кругъ семиугольника; видимъ аналитическое понятіе, обнаруживающее необходимую связь между теоріею звѣздчатыхъ многоугольниковъ и теоріею многоугольниковъ, извѣстныхъ древнимъ.

Далѣе Кеплеръ выражаетъ еще разъ тотъ же принципъ въ весьма замѣчательныхъ словахъ; понимая трудности, проистекающія именно отъ полноты и богатства анализа, онъ признаетъ всѣ преимущества этого метода.

„До сихъ поръ, говоритъ онъ, сторона многоугольника и „одноименной съ нимъ звѣзды имѣли у насъ каждая свое

„особое, отличительное опредѣленіе. Въ алгебраическомъ ана„лизѣ особенно удивительно то (хотя это-то именно и зат„рудняетъ геометра), что искомое не можетъ быть задано „въ отдѣльности. Но, хотя это еще и не доказано въ общемъ „видѣ, будемъ продолжать начатое нами выше, т. е. что „уравненію удовлетворяетъ столько чиселъ, сколько въ фигурѣ „находится хордъ или діагоналей различной длины; какъ на„примѣръ въ пятиугольникѣ—двѣ, въ семиугольникѣ—три; „изъ нихъ одно число выражаетъ сторону, а другія—діаго„нали. Вотъ почему, наконецъ, все, найденное для отноше„нія стороны фигуры къ діаметру, принадлежитъ также от„ношеніямъ всѣхъ другихъ линій къ тому же діаметру."

Такія же соображенія высказываетъ Кеплеръ въ слѣдующемъ предложеніи, гдѣ онъ доказываетъ невозможность раздѣлить геометрически дугу на три, пять, семь и т. д. частей. „Вопросу, говоритъ онъ, соотвѣтствуютъ многія линіи, а изъ „свойства, общаго многимъ вещамъ, нельзя вывести ничего „особаго и частнаго для одной изъ нихъ въ отдѣльности." [138])

Во второй книгѣ подъ заглавіемъ: *De figurarum regularium congruentia* говорится опять о правильныхъ многоугольникахъ, потомъ о многогранникахъ. Кеплеръ разсматриваетъ различные способы соединять однородные и разнородные многоугольники такъ, чтобы вполнѣ занять ими часть

---

[138]) Среди этихъ вѣрныхъ и глубокихъ математическихъ соображеній мы встрѣчаемъ разсужденія, свидѣтельствующія о томъ, что геній Кеплера, подъ вліяніемъ идей Пиѳагоровой и Платоновой школы о міровыхъ свойствахъ чиселъ, стремился сдѣлать изъ этихъ научныхъ изслѣдованій о многоугольникахъ употребленіе странное и фантастическое; таково слѣдующее мѣсто, которымъ оканчивается 45-е предложеніе: „И такъ доказано, что стороны этихъ фигуръ должны навсегда „остаться неизвѣстными, и что онѣ по самой сущности своей, не мо„гутъ быть найдены. И нѣтъ ничего удивительнаго, что то, чего нельзя „встрѣтить въ первообразѣ (Archétype) міра, не можетъ быть вы„ражено."

И такія-то идеи привели Кеплера къ одному изъ величайшихъ открытій, сдѣланныхъ человѣчествомъ.

плскости, или чтобы составить изъ нихъ правильные много гранники.

Въ третьей книгѣ *De ortu proportionum harmonicarum, deque natura et differentiis rerum ad cantum pertinentium* говорится только о музыкальной гармоніи, такъ что книга эта совсѣмъ не относится къ геометріи и астрономіи.

Четвертая книга имѣеть заглавіе: *De configuratonibus harmonicis radiorum sideralium in Terra earumque effectu in ciendis Meteoris, aliisque Naturalibus.* Кеплеръ употребляетъ здѣсь звѣздчатые многоугольники и величины ихъ угловъ, чтобы сравнить съ ними распредѣленія (*configurations*) или угловыя разстоянія планетъ: величины этихъ угловыхъ разстояній находились, какъ предполагалось, въ соотвѣтствіи съ событіями и явленіями подлуннаго міра, которыя должны были быть различны, смотря по тому, какому многоугольнику принадлежать эти углы. Дѣятельныя распредѣленія (*configurations efficaces*)—это такія, которыя способны возбудить земную природу и внутреннія качества духа; имъ соотвѣтствуютъ углы многоугольниковъ, вписываемыхъ геометрически. Сюда относятся: квадратъ, треугольникъ, пятиугольникъ втораго вида, семиугольникъ третьяго вида, десятиугольникъ третьяго вида и двѣнадцатиугольникъ пятаго вида.

Пятая книга имѣетъ заглавіе: *De harmonia perfectissima motuum coelestium ortuque ex iisdem Excentricitatum semidiametrorumque et Temporum periodicorum.* Здѣсь Кеплеръ сравниваетъ пять правильныхъ тѣлъ съ гармоническими отношеніями и старается открыть въ этомъ аналогію съ движеніями планетъ. Изъ заглавія видно, что въ этой V книгѣ находится знаменитый законъ *о постоянствѣ отношенія квадратовъ временъ обращеній планетъ къ кубамъ ихъ разстояній отъ солнца.* [139]).

[139]) Особое чувство смѣшанное съ уваженіемъ возбуждаютъ слова самаго Кеплера, въ которыхъ онъ возвѣстилъ о своемъ великомъ открытіи; въ нихъ выражается все его счастіе и вся важность, которую онъ придавалъ открытію этой, такъ глубоко скрытой, истины.

Изъ предложеннаго нами обзора сочиненія Кеплера видно, что ученіе о *звѣздчатыхъ* многоугольникахъ имѣетъ здѣсь важное и новое значеніе въ аналитическомъ отношеніи. Не смотря на это, впослѣдствіи мы не находимъ никакого слѣда этого ученія, хотя оно должно было представляться въ теоріи угловыхъ сѣченій, занимавшей часто геометровъ. Въ особенности не долженъ бы былъ пройти его молчаніемъ Валлисъ, который только черезъ полвѣка послѣ Кеплера написалъ исторію алгебры и трактатъ объ угловыхъ сѣченіяхъ. Геометръ этотъ видѣлъ правда, что второй корень уравненія второй степени, опредѣляющаго сторону правильнаго пятиугольника, вписаннаго въ кругъ, представляетъ величину діагоналей [140]); но такое геометрическое изъясне-

„Нашедши, благодаря наблюденіямъ Браге и благодаря постоянному „и долгому труду, истинные размѣры орбитъ, наконецъ-то говоритъ „онъ, наконецъ-то открылъ я соотношеніе между періодическими вре„менами и размѣрами этихъ орбитъ;

Sera quidem respexit inertem,
Respexit tamen, et longo tempore venit.

„И если вы хотите въ точности знать время этого открытія, то 8-го „марта этого 1618 года оно въ первый разъ зародилось въ моемъ умѣ, „потомъ было испробовано посредствомъ неловкихъ вычисленій и вслѣд„ствіе этого отвергнуто какъ ложное; послѣ того 15-го мая оно пред„ставилось мнѣ съ новою силой и разсѣяло мракъ моего ума; но какъ „ни полно подтверждалось оно моими семнадцатилѣтними работами „надъ наблюденіями Браге и моими собственными совершенно согласными „соображеніями, я сначала думалъ, что это мечта и что я имѣю дѣло „съ обманчивымъ доказательствомъ, но нѣтъ болѣе сомнѣній; вполнѣ „вѣрно и вполнѣ точно предложеніе, что *отношеніе между періодиче„скими временами двухъ планетъ въ точности равно отношенію полу„торныхъ степеней (sesqui-altere du rapport) ихъ среднихъ разстояній*“ (*Lib.* V, p. 189).

140) Замѣчаніе это, по всей вѣроятности, было сдѣлано уже полтора вѣка тому назадъ Стифельсомъ; въ его алгебрѣ находимъ выраженія стороны и діагоналей правильнаго пятиугольника въ функціи радіуса описаннаго круга (см. его *Arithmetica integra fol* 178); если допустить, что онъ получилъ эти выраженія не чрезъ рѣшеніе квадратнаго уравненія, то ихъ форма все таки должна была ему показать, что двѣ эти

ніе корня, чуждаго вопросу, было недостаточно: нужно было распространить его на самое изложеніе задачи и видѣть въ этомъ корнѣ не только діагональ, но *сторону втораго пятиугольника.* Эта мысль, которая намъ теперь кажется очень простою и которая пополняетъ аналитическое рѣшеніе задачи, ускользнула отъ Бернулли, Эйлера и Лагранжа и пришла на умъ геометрамъ только самаго послѣдняго времени.

Ученіе Брадвардина о выдающихся многоугольникахъ было горячо опровергаемо писателемъ XVII вѣка *J. Broscius'*омъ въ сочиненіи *Apologia pro Aristotele et Euclide contra P. Ramum et alios*; *Dantisci*, 1652 *in* 4°. Ученію этому нечего было бояться какихъ бы то ни было нападеній, которыя могли служить только къ его распространенію и къ большему знакомству съ нимъ. Но, по странному случаю, это сочиненіе Бросція было кажется послѣднимъ, въ которомъ говорилось о такихъ многоугольникахъ. Послѣ этого они были совершенно забыты и не возбудили о себѣ никакого воспоминанія даже послѣ того, какъ Пуансо, въ началѣ нынѣшняго вѣка, снова открылъ ихъ и ввелъ въ науку.

Вотъ что находится въ сочиненіи Бросція объ этихъ многоугольникахъ.

Сначала онъ сильно порицаетъ Рамуса за то, что тотъ указывалъ на звѣздчатый пятиугольникъ, какъ на фигуру, иную чѣмъ треугольникъ, въ которой сумма равна двумъ прямымъ. „Это доказываетъ, говоритъ онъ, незнаніе Рамуса „въ геометріи. Фигура эта есть десятиугольникъ съ пятью „входящими и пятью выдающимися углами и сумма его уг„ловъ равна шестнадцати прямымъ.“

Бросцій указываетъ на сочиненіе Брадвардина и доказываетъ, что можно составить безчисленное множество фигуръ съ *выдающимися углами* въ 7, 9, 11 и т. д. сторонъ,

---

линіи суть корни подобнаго уравненія; потому что Стифельсъ, весьма искусный алгебраистъ своего времени, былъ особенно опытенъ въ рѣшеніи квадратныхъ уравненій.

фигуръ, въ которыхъ, какъ въ фигурѣ Рамуса, сумма угловъ равна двумъ прямымъ. Брадвардинъ только подозрѣвалъ это красивое предложеніе, но не доказалъ его; Charles de Bouvelles примѣнилъ его къ выдающемуся семиугольнику третьяго вида. Бросцій идетъ далѣе: онъ разсматриваетъ фигуры различныхъ видовъ при одномъ и томъ же числѣ сторонъ и опредѣляетъ сумму ихъ угловъ.

Онъ находитъ, что есть три вида семиугольниковъ, считая въ томъ же числѣ обыкновенный, и въ нихъ сумма угловъ равна 10, 6 и 2 прямымъ;

Три вида восьмиугольниковъ, въ которыхъ сумма угловъ равна 12, 8, 4 прямымъ;

Шесть видовъ фигуръ съ 14-ю выдающимися углами (въ томъ числѣ обыкновенный четырнадцатиугольникъ), въ которыхъ сумма угловъ есть 24, 20, 16, 12, 8 и 4 прямыхъ;

Семь видовъ фигуръ съ 15-ю выдающимися углами, въ которыхъ сумма угловъ равна 26, 22, 18, 14, 10, 6 и 2 прямымъ.

Эти выводы согласны съ закономъ, найденнымъ Пуансо, по которому сумма угловъ всякаго многоугольника есть $s = 2(m - 2h)$, гдѣ m есть число сторонъ и h указатель *вида* или *порядка* фигуры.

Точка зрѣнія, съ которой Бросцій смотрѣлъ на эти фигуры, видя въ нихъ многоугольники съ углами попеременно *входящими* и *выдающимися* и стороны которыхъ не пересѣкаются между собою, привела его къ новому способу построенія этихъ фигуръ и къ любопытному свойству изопериметріи.

Возьмемъ, напримѣръ, обыкновенный правильный семиугольникъ и отмѣтимъ середины его семи сторонъ. Представимъ себѣ, что около прямой, соединяющей двѣ смежныя средины, мы вращаемъ маленькій треугольникъ, отсѣкаемый этою прямою отъ семиугольника, и наконецъ совмѣщаемъ его съ плоскостію фигуры. Подобнымъ же образомъ около шести другихъ прямыхъ, соединяющихъ попарно смежныя вершины, перевернемъ маленькіе треугольники, отсѣкаемые

отъ семиугольника. Всѣ они вмѣстѣ образуютъ въ своихъ новыхъ положеніяхъ новый многоугольникъ о четырнадцати сторонахъ, съ углами поперемѣнно выдающимися и входящими.

Этотъ новый четырнадцатиугольникъ очевидно имѣетъ периметръ одинаковый съ первоначальнымъ семиугольникомъ.

Если теперь опять около каждой прямой, соединяющей вершины двухъ смежныхъ входящихъ угловъ, повернемъ маленькій треугольникъ, отсѣкаемый ею отъ многоугольника, то получимъ новый многоугольникъ о четырнадцати сторонахъ, съ углами поперемѣнно входящими и выдающимися; этотъ новый многоугольникъ очевидно будетъ имѣть периметръ одинаковый со вторымъ, а слѣдовательно и съ первымъ многоугольникомъ.

Площади трехъ такихъ многоугольниковъ весьма различны между собою, такъ какъ второй помѣщается внутри перваго, и третій внутри втораго.

Не трудно убѣдиться, что второй многоугольникъ есть ничто иное, какъ семиугольникъ втораго рода, въ которомъ уничтожены части сторонъ, заключающіяся внутри; подобнымъ же образомъ третій многоугольникъ есть семиугольникъ третьяго вида, въ которомъ также вычеркнуты внутренніе отрѣзки сторонъ.

И такъ вотъ новый способъ получать выдающіеся многоугольники, производя ихъ одни изъ другихъ. Этотъ способъ заслуживаетъ вниманія, особенно вслѣдствіе того любопытнаго обстоятельства, что всѣ многоугольники, выводимые такимъ образомъ изъ какого угодно первоначальнаго, имѣютъ всегда одинъ и тотъ же периметръ.

Мы не встрѣчаемъ еще другихъ сочиненій, въ которыхъ говорилось бы о выдающихся многоугольникахъ, до начала нынѣшняго вѣка, когда эта теорія явилась въ новомъ видѣ; но ни знаменитый авторъ ея, ни геометры, которые ею восхищались, не подозрѣвали даже, что она играла уже важную роль въ теченіе четырехъ столѣтій.

О геометріи Арабовъ.

Съ VIII до XIII вѣка Европа была погружена въ глубокое невѣдѣніе. Въ этотъ долгій періодъ любовь къ наукамъ и ихъ развитіе сосредоточены были у Арабовъ Багдада и Кордовы. Имъ обязаны мы знакомствомъ съ греческими сочиненіями, которыя были переведены ими для своего употребленія и отъ нихъ перешли къ намъ гораздо прежде, чѣмъ сдѣлались извѣстны эти сочиненія на языкѣ оригинала. До самаго послѣдняго времени думали, что въ этомъ состояла единственная услуга, оказанная намъ Арабами; собственныя ихъ сочиненія не старались отыскивать и изучать, предполагая, что въ нихъ не должно заключаться ничего оригинальнаго или отличающагося отъ произведеній греческой образованности. Это была ошибка, которую теперь начинаютъ исправлять, особенно съ того времени, какъ ознакомились съ сочиненіями Индусовъ и узнали, что Арабы почерпнули изъ нихъ начала алгебраическаго исчисленія, существенно отличающаго ихъ сочиненія отъ сочиненій Грековъ. Но ошибка эта замѣчена еще слишкомъ недавно и арабскія сочиненія намъ еще мало извѣстны. Значительное число ихъ уже много столѣтій существуетъ въ Европѣ, большею частію на арабскомъ языкѣ, нѣкоторыя же на латинскомъ въ переводахъ XII и XIII вѣка. Пожелаемъ, чтобы важность этихъ сочиненій была признана и чтобы они, по возможности скоро, вышли изъ поглощающихъ ихъ библіотекъ: тогда только можно будетъ думать о настоящей исторіи арабской науки. Теперь же можно собрать только нѣсколько главныхъ фактовъ и разсѣянныхъ данныхъ, по которымъ не возможно съ увѣренностію судить о мѣрѣ участія этого великаго и знаменитаго народа въ дѣлѣ распространенія и усовершенствованія математическихъ наукъ, и изъ которыхъ недостаточно выясняется характеръ, полученный этими науками отъ смѣшенія двухъ составныхъ элементовъ: — греческаго и индѣйскаго. Но характеръ этотъ обнаруживается въ европейскихъ сочиненіяхъ XV вѣка, на-

писанныхъ по арабскимъ образцамъ, и по нимъ-то мы можемъ теперь его изучить и ясно съ нимъ ознакомиться.

Наклонность и ревностная любовь Арабовъ къ наукамъ развились быстро въ VIII вѣкѣ, когда началось царствованіе Абассидовъ. Эти государи, благородные подражатели Егитетскихъ Птоломеевъ, сосредоточили въ Багдадѣ таланты всего міра [141]). Они дѣятельно собрали всѣ знанія, которыя только могли найти у народовъ, покоренныхъ пріемниками Пророка и Оміадами. Такимъ образомъ арабы сдѣлались владѣтелями и единственными хранителями всѣхъ уже готовыхъ наукъ [142]) въ то самое время, когда онѣ, слѣдуя судьбѣ всего человѣческаго, клонились къ упадку и терялись у народовъ создавшихъ и развивавшихъ ихъ въ теченіе многихъ вѣковъ. Греки и Индусы [143]) были главными вкладчиками въ этотъ научный капиталъ. Таково происхожденіе наукъ и въ особенности геометріи у Арабовъ.

Кажется, что элементы Евклида были первымъ сочиненіемъ, которое они перевели, а именно въ VIII вѣкѣ, въ царствованіе Альманзора. Благодаря просвѣщенному поощренію калифа Аль-Мамуна (который началъ царствовать въ Багдадѣ въ 814 году), вскорѣ сдѣлались извѣстными сочиненія Архимеда, Аполлонія, Гипсикла, Менелая, Ѳеодосія и Альмагестъ Птоломея.

Съ этихъ поръ начинаются быстрые успѣхи Арабовъ въ наукахъ; въ IX вѣкѣ мы находимъ искусныхъ геометровъ, обладавшихъ весьма обширными свѣдѣніями.

---

[141]) Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, t. I. p. 117.

[142]) „Не подлежитъ сомнѣнію, что Арабы, со времени основанія ка-„лифата и учрежденія ихъ царства, имѣли глубокое уваженіе къ искус-„ствамъ и наукамъ, такъ какъ они перевели на свой языкъ всѣ лучшія „греческія, еврейскія, халдейскія и индѣйскія книги.“ (D'Herbelot, *Bibl. orientale*, по поводу слова *Elm* [*наука*].)

[143]) Въ *Bibl. orientale de D' Herbelot*, при словѣ *ketab* (т. е. *трактатъ*), находимъ названія множества сочиненій, переведенныхъ или передѣланныхъ Арабами съ индѣйскаго, по всѣмъ отдѣламъ математическихъ и философскихъ наукъ.

Три брата Могаммедъ, Гамедъ и Газенъ, сыновья Муза-Бенъ-Шакера, прославились переводами многихъ греческихъ и индѣйскихъ сочиненій и своими собственными сочиненіями по всѣмъ отдѣламъ математики; многія изъ ихъ сочиненій дошли до насъ. Астрономическія таблицы, составленныя Могаммедомъ-Бенъ-Муза *по индѣйской системѣ*, были долгое время знамениты на востокѣ, но болѣе драгоцѣнное и въ нашихъ глазахъ болѣе важное сочиненіе его есть Трактатъ Алгебры, самый древній изъ всѣхъ, которые были извѣстны до послѣдняго времени, пока не были еще открыты сочиненія Индусовъ. Изъ этого сочиненія Европейцы почерпнули первыя свѣдѣнія въ алгебрѣ, сначала черезъ посредство Леонарда изъ Пизы, который ѣздилъ самъ учиться въ Аравію, потомъ непосредственно изъ самаго сочиненія, которое было переведено въ XIII вѣкѣ. По этой причинѣ Могаммеда-Бенъ-Муза считали изобрѣтателемъ алгебры [144])

---

[144]) Въ началѣ своего сочиненія *Ars magna* Карданъ говоритъ: *Haec ars olim a Mahomete, Mosis Arabis filio, initium sumpsit. Etenim hujus rei locuples testis Leonardus Pisanus.*

Тоже самое онъ повторяетъ въ своемъ трактатѣ *De subtilitate* (lib. XVI), гдѣ онъ ставитъ Могаммеда Бенъ Муза послѣ Архитаса и даетъ ему девятое мѣсто въ ряду двѣнадцати величайшихъ геніевъ человѣчества. *Huic Mahometus Moisis filius Arabs, Algebraticae ut ita dicam artis inventor, succedit. Ob id inventum ab artis nomine cognomen adeptus est.*

Тарталеа приписываетъ также Могаммеду-Бенъ-Муза изобрѣтеніе алгебры, которую онъ въ заглавіи VI части своего сочиненія *General trattato di numeri e misure*, опредѣляетъ такъ: *Antica pratica speculativa de l'arte magna, detta in Arabo Algebra et Almucabala, over regola della cosa, trovata da Maumeth, figlio de Moise arabo, la quale se puo dire la perfetta arte del calculare*, etc.

Сначала приписывали изобрѣтеніе алгебры Геберу, другому арабскому геометру. Такъ Стифельсъ, знаменитый нѣмецкій алгебраистъ, современникъ Кардана, писалъ къ профессору Милихію: *Tuo quoque consilio usus, Algebram (quam persuasisti bonis rationibus a Gebro astronomo, autore ejus ita esse nuncupatam) multis exemplis illustratam scripsi (Arithmetica integra*, p. 226); онъ же называетъ часто алгебру *Regula Gebri.* Это мнѣніе было еще раздѣляемо въ XVII столѣтіи (см. Kepler, *Harmonices Mundi*, lib. I, prop. 45); но оно не имѣло другаго осно-

и имя его, по справедливости имѣло большую извѣстность между европейскими геометрами. Однако сочиненіе его, которое, хотя бы изъ признательности, слѣдовало напечатать, оставалось въ рукописи и было въ теченіи трехъ столѣтій забыто; только въ 1831 году Розенъ въ первый разъ напечаталъ его на арабскомъ и англійскомъ языкѣ. Либри въ I томѣ Histoire des sciences en Italie напечаталъ одинъ изъ латинскихъ переводовъ, хранившихся въ королевской библіотекѣ. Переводъ этотъ не такъ полонъ, какъ рукопись, которою пользовался Розенъ. Въ немъ нѣтъ между прочимъ геометрическаго отдѣла.

Извѣстно, что Могаммедъ-Бенъ-Муза заимствовалъ часть своихъ математическихъ познаній у Индѣйцевъ [145]. Надобно думать, что отъ нихъ онъ получилъ и алгебру. Сочиненіе его представляетъ несомнѣнное сходство съ сочиненіями Индѣйцевъ, но нисколько не похоже на книгу Діофанта. Могаммедъ, подобно Индѣйцамъ, вводитъ геометрическія

ванія, кромѣ сходства въ словахъ, и потому не могло удержаться, особенно послѣ того, какъ стала извѣстна истинная этимологія слова алгебра, которое происходитъ отъ двойнаго арабскаго названія *Algebr v Almocabelah*, означавшаго *противоположеніе и сравненіе* (*oppositio et comparatio*). Это названіе, которое мы замѣняемъ однимъ словомъ *алгебра*, хорошо подходитъ къ теоріи уравненій, составляющей основаніе всей этой науки.

Другіе писатели, во главѣ которыхъ стоятъ Регіомонтанъ и Шебель, считали первымъ основателемъ алгебры Діофанта и это мнѣніе вообще было принято, такъ какъ Діофантъ существовалъ гораздо ранѣе Арабовъ. Но въ настоящее время возникъ вопросъ о первенствѣ между Греками и Индусами. Брамегупта жилъ двумя вѣками позднѣе Діофанта, но совершенство его сочиненія свидѣтельствуетъ несомнѣнно о весьма древнемъ существованіи алгебры въ Индіи.

Пелетье въ своей алгебрѣ говоритъ, что это одно изъ такихъ дѣлъ, изобрѣтеніе которыхъ не могло принадлежать одному человѣку, и которыя *n'ont pris règle, forme et ordre qu'après un long temps de circuitions, d'intermissions et de continuelles exercitations d'esprit.*

[145]) Casiri, *Bibliotheca Arabico-Hispana*, p. 427—428.— Colebrooke, *Brahmegupta and Bhascara Algebra*, Dissertation, p. LXXII.—F. Rosen, *Algebra of Mohammed ben Musa*, предисл. стр. VIII.

соображенія, чтобы со всею ясностію обнаружить вѣрность алгебраическихъ дѣйствій; особенно замѣчательно доказательство, по этому способу, правилъ для рѣшенія уравненія второй степени, при чемъ онъ разсматриваетъ три случая [146]). Сочиненіе его содержитъ также, подобно индѣй-

---

[146]) Эти три случая даны авторомъ только въ числовыхъ примѣрахъ; помощію буквъ они представляются въ видѣ трехъ слѣдующихъ уравненій:

$$ax^2 + bx - c = 0,$$
$$ax^2 - bx - c = 0,$$
$$ax^2 - bx + c = 0.$$

Общее уравненіе второй степени можетъ представлять еще четвертый случай:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

гдѣ всѣ члены положительные; Могаммедъ объ немъ не говоритъ, такъ какъ корни при этомъ бываютъ всегда отрицательные.

Во всѣхъ уравненіяхъ онъ разсматриваетъ только *положительные* корни, *отрицательные* же оставляетъ въ сторонѣ, какъ неимѣющіе никакого значенія.

Въ третьемъ случаѣ, для уравненія $ax^2 - bx + c = 0$, оба корня котораго

$$x = \frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$$

положительны (предполагая, что они дѣйствительные), Могаммедъ говоритъ, что вычисляется и тотъ и другой корень, но что всякій разъ необходимо удостовѣряться, который изъ нихъ соотвѣтствуетъ вопросу. Сначала пробуютъ первый, получаемый отъ знака *плюсъ*; если онъ негодится, то вопросу будетъ необходимо удовлетворять второй корень, происходящій отъ знака *минусъ*. (*When you meet with an instance which refers you to this case, try its solution by addition, and if that do not serve, then subtraction certainly will.* Page 11).

Индѣйцы принимали также два корня, когда они оба соотвѣтствуютъ вопросу (*Bija-Ganita*, §§ 130, 139), и отбрасывали одинъ изъ нихъ, какъ неимѣющій смысла, въ другихъ случаяхъ (*ibid.* §§ 140, 141). Примѣромъ можетъ служить задача: *Тѣнь гномона, имѣющаго 12 дюймовъ вышины, уменьшенная на третью часть гипотенузы, равна 14 дюймамъ; найти длину тѣни.* При рѣшеніи вопроса получается квадратное уравненіе, корни котораго положительные и равны $\frac{45}{2}$ и 9. Пер-

скимъ сочиненіямъ, геометрическій отдѣлъ о измѣреніи поверхностей.

Здѣсь же находимъ три приблизительныя выраженія отношенія окружности къ діаметру $\frac{22}{7}$, $\sqrt{10}$ и $\frac{62832}{20000}$, которыя, какъ мы уже говорили, извѣстны были Индѣйцамъ [147]); и

вый изъ нихъ соотвѣтствуетъ вопросу, потому что онъ болѣе 14 и, будучи уменьшенъ на третью часть гипотенузы, можетъ дать 14; второй же будучи менѣе 14, долженъ быть отброшенъ, какъ говоритъ Баскара, по причинѣ своей негодности (*by reason of its incongruity*).

Лука Бурго во всемъ буквально слѣдуетъ за Могаммедомъ-Бенъ-Муза; онъ также разсматриваетъ три случая и для каждаго даетъ рѣшеніе въ четырехъ латинскихъ стихахъ; потомъ онъ подтверждаетъ эти рѣшенія геометрическими соображеніями. Въ случаѣ двухъ положительныхъ корней, онъ признаетъ, что для нѣкоторыхъ вопросовъ годятся оба корня, другимъ же удовлетворяетъ только одинъ (*Siche l'uno e l'altro modo satisfa el thema. Ma a le volte se hane la verita a l'uno modo. A le volte a l'altro. El perche se cavando la radice del ditto remanente de la mita de le cose non satisfacesse al thema. E tu la ditta R* (*radice*) *agiongi a la mita de le cose, e haverai el quesito: e mai fallara che a uno de li doi modi non sia satisfatto el quesito, cioe giongnendola, overo cavandola del dimeccamento de le cose, etc. Summa de Arithmetica, etc.* Distinctio 8, tractatus 5, Art. 12).

Это несомнѣнное сходство сочиненія Могаммеда-Бенъ-Муза съ одной стороны съ сочиненіями Индѣйцевъ и съ другой стороны съ сочиненіемъ Луки Бурго достаточно объясняетъ начало алгебры у Европейцевъ и прямое вляніе арабскихъ сочиненій на развитіе и характеръ математическихъ наукъ въ эпоху возрожденія. Это мы и желали показать въ этой замѣткѣ.

[147]) Кажется, что отношеніе $\frac{62832}{20000} = \frac{3927}{1250} = 3{,}14160$ принадлежитъ Индѣйцамъ и что они нашли его, вычисляя сторону правильнаго многоугольника, имѣющаго 768 сторонъ. *Gl 'Indiani, come apparisce di un libro dei Bramini intitolato Ajin-Akbari, avean trovato con ingegnosissimo metodo Geometrico, mediante l'inscrizione di un poligono regolare di 768 lati che la circonferenza del circolo sta al diametro come 3927 a 1250.* (*Saggio sulla storia delle mathematiche, opera del Sig. P. Franchini,* Lucca 1821, in 8). Т. Симпсонъ, посредствомъ вписыванія многоугольника о 768 сторонахъ нашелъ тоже самое отношеніе 3,1416; онъ получилъ даже болѣе приближенное отношеніе

три числа 13, 14 и 15, выражающія три стороны треугольника, что мы также встрѣтили въ сочиненіяхъ Брамегупты и Баскары.

Сочиненіе Могаммеда далеко не такъ обширно, какъ эти послѣднія: въ немъ не говорится о *неопредѣленныхъ* уравненіяхъ второй и даже первой степени. Причину этого мы находимъ въ предисловіи автора, гдѣ сказано, что онъ составилъ этотъ сжатый трактатъ, по желанію калифа Аль-Мамуна, съ цѣлію облегчить множество дѣйствій, часто представляющихся въ общественномъ быту и обыденной жизни.

Одно это мѣсто доказывало бы, что у Арабовъ въ то время были болѣе обширныя и высшія сочиненія, если бы мы даже не знали, что имъ извѣстны были ученыя сочиненія Индѣйцевъ и что сами они писали о рѣшеніи уравненій третьей степени, какъ мы это увидимъ ниже.

Какъ бы то было, но это фактъ весьма замѣчательный и достойный вниманія европейскихъ ученыхъ, что трактатъ алгебры, который у Арабовъ *разсматривался въ IX вѣкѣ, какъ элементарный* и былъ, такъ сказать, практическимъ руководствомъ для всенароднаго употребленія, сдѣлался черезъ 700 лѣтъ у Европейцевъ *Ars magna* и послужилъ основаніемъ и началомъ величайшихъ открытій въ наукѣ [148]).

$\frac{628317}{200000}$ (см. его *Элементы Геометріи*). Способъ его очень простъ; не знаю, почему объ немъ никогда не упоминаютъ.

[148]) До сихъ поръ изъ арабскихъ сочиненій извѣстна была только алгебра Могаммеда-Бенъ-Муза. По крайней мѣрѣ объ ней только говорили геометры XVI вѣка: Лука Бурго, Карданъ, Пелетье, Тарталеа Стевинъ, и др. Но объ алгебрѣ писали многіе другіе арабскіе писатели: имена многихъ изъ нихъ и заглавія ихъ сочиненій можно найти въ *Bibliothèque orientale* de D' Herbelot при словахъ *Gebr* и *Ketab* (стр. 966, 967, 981 изд. 1697, in-fol).

Существуетъ еще сочиненіе, переведенное съ арабскаго на англійскій языкъ въ Калькуттѣ въ 1812 году; въ немъ изложены ариѳметика, геометрія и алгебра; я удивляюсь, почему о немъ не говорятъ въ послѣдніе годы, когда стали заниматься исторіею наукъ у Индѣйцевъ и Арабовъ. Заглавіе этого сочиненія, до сихъ поръ намъ неизвѣстнаго,

Могаммедъ написалъ еще трактатъ о плоскихъ и сферическихъ треугольникахъ, который, какъ говорятъ, существуетъ еще и теперь подъ заглавіемъ *De figuris planis et sphaericis.*

Существуетъ еще сочиненіе по геометріи, которое онъ написалъ по всей вѣроятности вмѣстѣ съ двумя братьями Гаметомъ и Газеномъ, такъ какъ оно носитъ заглавіе *Verba Moysi, filii Schaker, Mahumeti, Hameti, Hasen.* Въ этомъ сочиненіи доказана формула площади треугольника въ функціи трехъ сторонъ и приложена, какъ у Индѣйцевъ, къ треугольнику, стороны котораго суть числа 13, 14 и 15. Доказательство тоже, какое было дано въ XIII вѣкѣ Фибонакки и Іорданомъ Неморарiемъ и которое передано намъ Лукою Бурго и Тарталеа. Оно принадлежитъ, кажется, Арабамъ, потому что существенно отличается отъ доказательства Герона Александрійскаго.

мы нашли въ каталогѣ библіотеки Langlès, art. 552, именно: *The kholasut-ool-hisab, a compendium of arithmetic and geometry; in the arabic language, by Buhae-oodd-deen, of Amool in Syria, with a translation into persian and commentary, by the late Muoluwee Ruoshun Ulee of Juonpoor: to which is added a treatise on algebra, by Nujm-ood-den Ulee khan, head Qazee, to the Sudr Deewanee and Nizamut Udalut, Revised and edited by Tarinee Churun Mitr, Muoluwee Jan Ulee and Ghoolam Ukbur.* Calkutta, Pereira, 1812, in 8.

Либри издалъ недавно сочиненіе по алгебрѣ, переведенное съ арабскаго оригинала на латинскій языкъ и остававшееся въ рукописи въ королевской библіотекѣ: *Liber augmenti et diminutionis vocatus numeratio divinationis, ex eo quod sapientes Indi posuerunt, quem Abraham compilavit, et secundum librum qui Indorum dictus est, composuit.*

Сочиненіе это драгоцѣнно во многихъ отношеніяхъ. Оно существенно отличается отъ сочиненій Могаммеда-Бенъ-Муза и имѣетъ предметомъ исключительно правила простаго и двойнаго ложнаго положенія. Затѣмъ оно показываетъ, что правила эти получены отъ Индѣйцевъ. До сихъ же поръ ихъ приписывали Арабамъ, основываясь на словахъ Луки Бурго, который называлъ ихъ правилами *Helcatagm*'а „*e vocabulo Arabo*" (*Summa de Arith.* etc. Distinctio VII, tractatus 1)

Но въ другихъ сочиненіяхъ того же времени ихъ называютъ *Regula falsi*, seu *augmenti et decrementi*, какъ назвалъ ихъ и компиляторъ Abraham (см. *Algorithmus de integris, minutiis vulgaribus, ac proportionibus, cum annexis de tri, falsi, aliisque regulis.* Liptzck, 1507, in 4⁰).

Три сына Муза-Бенъ-Шакера написали много другихъ сочиненій, которыя указаны въ *Bibliotheca Arabico-Hispana* Казири (t. I, p. 418).

Алкидъ, одинъ изъ ихъ знаменитѣйшихъ современниковъ, котораго Карданъ ставитъ, такъ же какъ и Могаммеда-Бенъ-Муза, въ число двѣнадцати величайшихъ геніевъ [149]), писалъ также по всѣмъ отдѣламъ математики. Карданъ съ похвалою отзывается о его трактатѣ *De regula sex quantitatum* [150]). Въ примѣчаніи VI мы говорили, въ чемъ состояло это правило шести количествъ, которое производилось или путемъ вычисленія или посредствомъ геометрическихъ построеній на основаніи Птоломеевой теоремы.

Алкидъ писалъ о ариѳметикѣ Индѣйцевъ (*De Arithmetica indica*) и объ алгебрѣ (*De quantitate relativa, seu Algebra*). Мы не будемъ упоминать о другихъ весьма многочисленныхъ сочиненіяхъ его. Нѣкоторыя изъ нихъ должны еще храниться въ испанскихъ библіотекахъ; многія изъ нихъ, безъ сомнѣнія, должны быть не лишены интереса [151]).

Тебитъ-Бенъ-Корахъ, ученикъ Могаммеда-Бенъ-Муза, былъ также знаменитый геометръ, владѣвшій математикою во всемъ ея объемѣ. Изъ множества оставленныхъ имъ сочиненій, списокъ которыхъ находимъ у Казири, преимущественно одно, *De problematibus algebricis geometrica ratione comprobandis*, должно было возбуждать живое любопытство геометровъ, потому что въ немъ, какъ видно изъ заглавія, Тебитъ прилагаетъ алгебру къ геометріи. Безъ сомнѣнія, заглавіе

[149]) *De subtilitate libri XXI*, lib XVI.

[150]) *Ibid.*, lib XVI—*Practica arithmeticae*, cap. 46.— *Opus novum de proportionibus numerorum*, etc. Prop. 5.

[151]) Особенно интересенъ былъ бы трактатъ объ индѣйской ариѳметикѣ. Странно, что въ вопросѣ, возбужденномъ уже очень давно, о происхожденіи нашей системы исчисленія и относящихся къ нему отрывкахъ изъ Боэція и Герберта, не обратились до сихъ поръ, вмѣсто разсужденій о формѣ цифръ, которая должна была необходимо измѣняться, къ сравненію этихъ двухъ отрывковъ съ арабскими сочиненіями по ариѳметикѣ, изъ которыхъ ни одно, сколько мнѣ извѣстно, не было ни переведено, ни издано въ оригинальномъ текстѣ.

это и дало поводъ къ слѣдующимъ словамъ Монтуклы: „Тебитъ писалъ о достовѣрности доказательствъ посредствомъ „алгебраическаго исчисленія и это можетъ вести къ предположенію, что Арабамъ принадлежитъ также и счастливая мысль о приложеніи алгебры къ геометріи." Для насъ это предположеніе стало несомнѣннымъ фактомъ, доказываемымъ уже алгеброю Могаммеда-Бенъ-Муза и подтверждаемымъ еще болѣе убѣдительно другимъ сочиненіемъ, которое сдѣлалось извѣстнымъ въ самое послѣднее время благодаря Седильо. (Am. Sédillot)

Сочиненіе это есть отрывокъ алгебры (найденный въ арабской рукописи № 1104 королевской библіотеки), въ которомъ *геометрически* рѣшены уравненія третьей степени.

Седильо показываетъ, что авторъ, прежде чѣмъ перейти къ рѣшенію такихъ уравненій, рѣшаетъ посредствомъ двухъ параболъ задачу о двухъ среднихъ пропорціональныхъ и потомъ пользуется этимъ при рѣшеніи нѣкоторыхъ уравненій. Не замѣтилъ ли арабскій геометръ, что всѣ уравненія третьей степени могутъ быть рѣшены посредствомъ двухъ среднихъ пропорціональныхъ и посредствомъ дѣленія угла на три равныя части? Извѣстно, что это одно изъ открытій, приписываемыхъ Вьету. Арабскій писатель строитъ посредствомъ круга и параболы корни уравненій вида $x^3 - ax - b = 0$. Но эти изслѣдованія относились, по всей вѣроятности, только къ численнымъ уравненіямъ, которыя одни встрѣчаются во всѣхъ арабскихъ сочиненіяхъ и въ европейскихъ до Вьета; нуженъ былъ неизмѣримый шагъ, чтобы перейти отъ этого къ рѣшенію буквенныхъ уравненій.

Во всякомъ случаѣ, не смотря на это ограниченіе въ алгебраическихъ изысканіяхъ Арабовъ, мы можемъ сказать, что они не только имѣли алгебру, но умѣли также выражать формулы графически и наглядно представлять ихъ значеніе; Кеплеръ [152]) сожалѣлъ, что ему было неизвѣстно это

[152]) Кеплеръ, не находя графическаго объясненія для квадратнаго уравненія, опредѣляющаго отношеніе стороны правильнаго пятиуголь-

прекрасное и драгоцѣнное искуство, которое было одно изъ самыхъ важныхъ открытій Вьета.

До сихъ поръ думали всегда, что свѣдѣнія Арабовъ не простирались далѣе уравненій второй степени. Это мнѣніе основывалось на томъ, что Фибонакки и Лука Бурго не шли далѣе этого [153]). Монтукла первый усомнился въ этомъ и думалъ, что Арабы могли заниматься изслѣдованіемъ уравненій третьей степени; онъ основывался на заглавіи, *Algebra cubica, seu de problematum solidorum resolutione*, одной рукописи, перенесенной съ востока знаменитымъ Голіемъ (Golius) и находящейся въ Лейденской библіотекѣ [154]). Отрывокъ алгебры, найденный Седильо, подтверждаетъ мнѣніе Монтуклы, которое, благодаря этому обстоятельству, становится особенно важнымъ для исторіи науки у Арабовъ.

Но ничто не даетъ намъ права думать, что имъ было извѣстно *алгебраическое* рѣшеніе уравненій третьей степени, т. е. выраженіе ихъ корней. Напротивъ, заглавія рукописей Лейденской и Парижской королевской библіотеки указываютъ, кажется, на то, что вопросъ состоялъ въ геометрическомъ построеніи корней посредствомъ тѣлесныхъ мѣстъ (коническихъ сѣченій).

Изъ всѣхъ отдѣловъ математики Арабы особенно тщательно разработали тригонометрію, по причинѣ приложеній ея къ астрономіи. Благодаря значительнымъ усовершенствованіямъ, они придали этой наукѣ новую форму и приспособили ее къ приложеніямъ, которыя Греки могли дѣлать только съ большимъ трудомъ.

ника къ радіусу описаннаго круга, выражается такъ: *Quomodo affectionem repraesentabo? quo actu geometrico? Nullo alio id doceor facere, quam usuprando proportionem, quam quaero: principium petitur. Miser calculator, destitutus omnibus geometriae praesidiis. Haerens inter spineta numerorum, frustra cossam suam respectat. Hoc unum est discrimen inter cossicas et inter geometricas determinationes.* (*Harmonices Mundi*, lib. I, p. 37).

153) Фибоннаки рѣшаетъ, правда, нѣсколько уравненій высшихъ степеней, но только такихъ, которыя приводятся къ квадратному.

154) *Histoire des Mathématiques*, t. I, p. 383.

Первые успѣхи тригонометріи начинаются со времени Альбатегнія, князя Сирійскаго [155]), который процвѣталъ около 880 и умеръ въ 928 году. Этому великому астроному, прозванному Птоломеемъ Арабовъ, принадлежитъ счастливая и плодотворная мысль замѣнить *хорды* дугъ, употреблявшіяся Греками въ ихъ тригонометрическихъ вычисленіяхъ, полухордами двойныхъ дугъ, т. е. *синусами* самыхъ данныхъ дугъ. „Птоломей, говоритъ онъ, употреблялъ цѣлыя „хорды только для простоты доказательствъ; мы же будемъ „брать половины хордъ двойныхъ дугъ [156])".

Альбатегній нашелъ основную формулу сферической тригонометріи:

$$\cos a = \cos b . \cos c + \sin b . \sin c . \cos A,$$

и употреблялъ ее въ различныхъ приложеніяхъ [157]).

Въ сочиненіяхъ его находимъ первую мысль о тангенсахъ и выраженіе $\frac{sinus}{cosinus}$, которое не употреблялось у Грековъ. Альбатегній вводитъ это выраженіе въ вычисленіяхъ гномоники и называетъ *удлинненною тѣнью* (ombre étendue); это есть ничто иное, какъ нашъ тригонометрическій *тангенсъ*. Альбатегній имѣлъ двойныя таблицы, которыя давали длины тѣни, соотвѣтствующія высотамъ солнца и высоты, соотвѣтствующія тѣнямъ; т. е. тангенсы дугъ и дуги, соотвѣтствующія тангенсамъ. Но таблицы эти вычислены были для радіуса 12, тогда какъ его таблицы синусовъ относились къ радіусу 60; это доказываетъ, что онъ не думалъ еще ввести тангенсы въ тригонометрическія вычисленія [158]).

---

[155]) Настоящее имя этого геометра есть Могаммедъ-Бенъ-Геберъ; онъ прозванъ былъ аль-Батани, потому что родился въ Батанѣ, городѣ Месопотаміи; изъ этого имени сдѣлано было Альбатегній.

[156]) Delambre, *Histoire de l'astronomie du moyen âge*, p. 12.

[157]) *Ibid.*, p. 21, 164. Извѣстно, что соотвѣтствующая формула:

$$\cos A = \sin A . \sin C . \cos a - \cos B . \cos C$$

принадлежитъ Вьету, который далъ ее въ 1593 году въ *Variorum de rebus mathematicis responsorum*, lib. VIII.

[158]) Delambre, *Histoire de l'astronomie du moyen âge*, p. 17.

Этотъ новый шагъ сдѣлали геометры Абулъ Вефа и Эбнъ-Юнисъ жившіе столѣтіемъ позднѣе его.

Абулъ Вефа (937—998), изложивъ теорію синусовъ, опредѣляетъ другія тригонометрическія линіи, которыя онъ „будетъ употреблять въ своемъ сочиненіи, чтобы пользоваться ими при рѣшеніи разныхъ задачъ сферической астрономіи.„

Эти линіи суть тангенсы и котангенсы, которые онъ называетъ *обратными* и *прямыми тѣнями* и секансы, называемые у него *діаметрами тѣни.*

Абулъ Вефа вычислилъ таблицу тангенсовъ для радіуса 60; секансовъ онъ не вычислялъ.

Его таблица тангенсовъ болѣе не существуетъ; но для насъ важно только знать, съ какого именно времени началось ихъ употребленіе въ тригонометрическихъ вычисленіяхъ.

Это счастливое нововведеніе въ наукѣ, изгнавшее изъ нея сложныя и неудобныя выраженія, содержащія синусы и косинусы неизвѣстнаго, перешло къ Европейцамъ только черезъ пятьсотъ лѣтъ послѣ этого; оно приписывается Регіомонтану и даже черезъ сто лѣтъ послѣ него Коперникъ не зналъ еще этого нововведенія.

Эбнъ-Юнисъ (979—1008) также употреблялъ тѣни, т. е. тангенсы и котангенсы и имѣлъ для этого шестизначныя таблицы [159]).

Ему принадлежитъ первая мысль о введеніи вспомогательныхъ угловъ для упрощенія формулъ и для устраненія извлеченія квадратныхъ корней, которые такъ затрудняли вычисленія. Эти пріемы теперь весьма обыкновенны, но они долгое время оставались неизвѣстными въ Европѣ и только черезъ 700 лѣтъ встрѣчаются нѣкоторые примѣры ихъ въ сочиненіяхъ Симпсона (Delambre, *Histoire de l'asronomie du moyen âge*, p. 165).

---

159) *Ibid.*, p. 164.

Астроному Геберу, жившему, какъ предполагаютъ, около 1050 года, обязаны мы формулою сферической тригонометріи $cosC = sinB. cosc$, одною изъ шести формулъ, служащихъ для рѣшенія прямоугольныхъ треугольниковъ [160]). Формула $cosa = cotgB. cotgC$ не была извѣстна до XVI вѣка; она была найдена Вьетомъ.

Обѣ эти формулы отличаются тѣмъ, что содержатъ въ себѣ два косые угла треугольника. Грекамъ извѣстны были только четыре другія формулы и онѣ были для нихъ достаточны, такъ какъ въ ихъ приложеніяхъ тригонометріи къ астрономіи не встрѣчался случай трехъ данныхъ угловъ.

Таковы важнѣйшія усовершенствованія, сдѣланныя Арабами въ тригонометріи.

Такимъ образомъ Арабы могли съ успѣхомъ заниматься астрономіей и между арабскими писателями можно насчитать весьма многихъ, посвятившихъ себя этой наукѣ. Здѣсь не мѣсто говорить о ихъ успѣхахъ въ этомъ отношеніи; мы скажемъ только нѣсколько словъ объ одномъ изъ приложеній, именно о гномоникѣ, которая въ сущности представляетъ вопросъ чисто геометрическій.

Арабы придавали большую важность построенію солнечныхъ часовъ, которые были для нихъ почти единственнымъ средствомъ измѣренія времени. Этимъ вопросомъ занимались, начиная съ IX вѣка, самые знаменитые геометры. Къ такого рода изслѣдованіямъ относились, безъ сомнѣнія, два сочиненія Алкинда: *De horologiorum sciathericorum descriptione* и *De horologio horisontali praestantiore;* и также два слѣдующія сочиненія Тебитъ-Бенъ-Кораха: *De horometria seu horis diurnis ac nocturnis* и *De figura linearum quas gnomometrum* (*styli apicis umbra*) *percurrit.* Послѣднее заглавіе показываетъ, кажется, что Тебитъ при построеніи солнечныхъ часовъ пользовался коническими сѣченіями. Мы увидимъ, что такой способъ употребленъ былъ съ большимъ

[160]) Черезъ B, C, мы означаемъ два косые угла треугольника, черезъ b, c,—противоположныя стороны и черезъ a гипотенузу.

искусствомъ другимъ арабскимъ геометромъ въ XIII вѣкѣ. Изъ Европейцевъ мысль эта явилась въ первый разъ у Мавролика; благодаря ей, сочиненіе его получило характеръ оригинальностя и сдѣлалось извѣстно.

Гномоника болѣе всего обязана арабскому писателю Абулъ Гассанъ Али изъ Марокко, жившему въ началѣ XIII вѣка; сочиненіе его называлось: *Книга соединяющая въ себѣ начала и цѣли*, потому что оно состояло изъ двухъ отдѣльныхъ частей: въ первой говорилось о *вычисленіяхъ*, а во второй о *инструментахъ* и ихъ употребленіи. Седильо, смерть котораго (въ 1832 году) есть чувствительная потеря для математическихъ наукъ и для восточныхъ языковъ, перевелъ это сочиненіе, которое было издано сыномъ его (M. L. Am. Sédillot) подъ заглавіемъ: *Traité des instruments astronomiques des Arabes* (2 vol. in-4°, Paris, 1834).

Сочиненіе это представляетъ полный и весьма подробный трактатъ гномоники Арабовъ; въ немъ много новаго, изобрѣтеннаго самимъ Абулъ Гассаномъ.

Здѣсь въ первый разъ находимъ мы линіи *равныхъ* часовъ которыя вовсе не употреблялись Греками. Это нововведеніе, сохранившееся потомъ у геометровъ новаго времени, принадлежитъ, кажется, самому автору, потому что онъ говоритъ: „Въ этомъ сочиненіи мы указываемъ вещи еще не-„употребительныя, какъ результатъ нашихъ собственныхъ „размышленій и соображеній.“ (Liv. III, chap. 14). Въ большой подробности онъ излагаетъ построеніе линій *разновременныхъ* часовъ (*temporaires*, которыя называются также *antiques*, *inegales* [161]), *judaiques*).

---

[161]) Часы эти, представляя собою всегда двѣнадцатую часть времени между восхожденіемъ и захожденіемъ солнца, считались равными впродолженіе каждаго дня, но продолжительность ихъ была различна въ разные дни. Линіи, обозначавшія эти часы отличались весьма мало отъ прямыхъ линій, какъ это доказано Деламбромъ посредствомъ вычисленія (*Histoire de l'astronomie ancienne*, T. II, p. 481). Но свойства этихъ линій, еще неизвѣстны; онѣ могли бы быть предметомъ прекрасной задачи анализа, которая приводится къ слѣдующему:

Въ главахъ XXVI и слѣдующихъ, подъ заглавіемъ: *Опредѣленіе параметра и главной оси параллелей для каждаго даннаго мѣста*, Абулъ Гассанъ пользуется свойствами коническихъ сѣченій для черченія дугъ часовыхъ линій. Онъ вычисляетъ параметры и оси этихъ кривыхъ въ функціи широты мѣста, склоненія солнца и высоты гномона.

Этотъ отдѣлъ сочиненія показываетъ, что геометръ-астрономъ Абулъ Гассанъ былъ человѣкъ замѣчательный. Онъ не даетъ доказательствъ своихъ правилъ, потому что они должны были находиться въ написанномъ имъ сочиненіи о *коническихъ сѣченіяхъ*. Деламбръ основательно изучилъ всю геометрическую часть сочиненія Абулъ Гассана и нашелъ что пріемы его гораздо лучше указываемыхъ Командиномъ и Клавіемъ,—писателями, которые чертили часовыя линіи также при помощи теоріи коническихъ сѣченій. Впрочемъ онъ замѣтилъ, что правила арабскаго геометра не доведены еще до окончательной простоты: въ нихъ для опредѣленія параметра вводится высота полюса и это усложняетъ и удлинняетъ вычисленія безъ всякой нужды, такъ какъ выраженіе параметра, приведенное только къ существеннымъ элементамъ, не зависитъ, какъ это доказалъ Деламбръ, отъ высоты полюса и содержитъ только склоненіе солнца и высоту гномона. Замѣчательно, говорилъ Деламбръ, что эта столь важная для гномоники теорема не обратила на себя вниманія писателей, предлагавшихъ весьма сложные пріемы для построенія часовыхъ линій помощію коническихъ сѣченій [162]).

Представимъ себѣ на полусферѣ нѣсколько круговъ, плоскости которыхъ параллельны между собою, но наклонены къ плоскости большаго круга, служащаго основаніемъ полусферѣ; если дуги этихъ параллельныхъ круговъ раздѣлимъ въ постоянномъ отношеніи, то точки дѣленія образуютъ на поверхности полусферы кривую двоякой кривизны. Проведемъ черезъ эту кривую конусъ, вершиною котораго былъ бы центръ полусферы:—сѣченіе такого конуса плоскостью будетъ линія равныхъ часовъ.

[162]) *Histoire de l'astronomie du moyen âge*, p. 536.

Теорема эта, выраженная геометрически, показываетъ, что *всѣ сѣченія прямаго конуса плоскостями равно отстоящими отъ вершины имѣютъ одинаковый параметръ.*

То же свойство принадлежитъ и косому конусу. Это слѣдуетъ изъ прекрасной теоремы Якова Бернулли, на которую мы указали по поводу коническихъ сѣченій Аполлонія и которою Бернулли пользовался для опредѣленія параметра сѣченія косаго конуса (при чемъ онъ предполагалъ сѣкущую плоскость перпендикулярною къ осевому треугольнику).

Магомету Багдадину, геометру X столѣтія, приписываютъ изящное изслѣдованіе о раздѣленіи поверхностей, переведенное Іоганномъ Де и Коммандиномъ [163]).

Сочиненіе это имѣетъ предметомъ раздѣленіе фигуры на части пропорціональныя даннымъ числамъ посредствомъ линій, приводимыхъ подъ извѣстными условіями. Оно заключаетъ въ себѣ 22 предложенія, изъ которыхъ 7 относится къ треугольнику, 9 — къ четыреугольнику и 6 — къ пятиугольнику. Авторъ излагаетъ эти предложенія въ формѣ задачъ, затѣмъ даетъ рѣшенія, которыя потомъ доказываетъ.

По своему характеру сочиненіе это представляетъ дополненіе къ геодезіи: ему впослѣдствіи подражали всѣ новые геометры въ сочиненіяхъ по практической геометріи.

Де и Коммандинъ предполагали, что сочиненіе это можетъ быть приписано Евклиду, который также писалъ о дѣленіи фигуръ, какъ это указываетъ Проклъ въ своемъ комментаріѣ на первую книгу элементовъ. Савилій не раздѣлялъ этого мнѣнія и вопросъ съ того времени остается неразрѣшеннымъ. Мы съ своей стороны весьма склоняемся къ тому, чтобы приписать сказанное сочиненіе одному изъ греческихъ геометровъ, если угодно—Евклиду, такъ какъ Проклъ упоминаетъ о его *Tractatus de divisionibus*; сочиненіе

---

[163]) *De superficierum divisionibus liber Machometo Bagdedino adscriptus. Nunc primum Joannis Dee Londinensis et Federici Commandini Urbinatis opera in lucem editus.*

Federici Commandini de eadem re libellus. Pisauri, 1570, in—4°.

по формѣ и чистотѣ геометрическаго стиля совершенно подобно греческимъ сочиненіямъ и никакимъ образомъ не похоже на сочиненія Арабовъ, которые, соединяя науку Грековъ съ наукою Индусовъ, вводили въ геометрію алгебраическія вычисленія и доказывали самыя общія теоремы на числовыхъ примѣрахъ, слѣдовательно не въ той мѣрѣ общности и отвлеченности, какъ мы это находимъ въ сказанномъ сочиненіи. Прибавимъ еще, что Греки съ перваго времени александрійской школы писали о геодезіи, какъ это видно изъ сочиненія Герона старшаго, которое издано Вентури; если бы у нихъ не было трактата *De divisionibus superficierum*, то это былъ бы пробѣлъ несогласный съ полнотою всѣхъ другихъ сочиненій ихъ.

Оптика была у Арабовъ предметомъ изслѣдованія многихъ писателей, изъ которыхъ самый извѣстный есть Альгазенъ. Его дошедшее до насъ сочиненіе [164]) отличается глубокими и обширными геометрическими изысканіями; здѣсь между прочимъ находимъ мы рѣшеніе задачи, зависящей при аналитическомъ способѣ изслѣдованія отъ уравненія четвертой степени. Задача заключается въ опредѣленіи отраженія точки отъ сферическаго зеркала по даннымъ положеніямъ глаза и предмета. Она занимала собою знаменитыхъ геометровъ новаго времени: Слюза, Гюйгенса, Баррова, Лопиталя, Р. Симсона. Послѣдній рѣшилъ ее очень просто помощію чисто-геометрическихъ соображеній. (*Sectionum conicarum libri V*, Appendix, p. 223).

Думали, что сочиненіе Альгазена есть подражаніе Оптикѣ Птоломея. Таково было мнѣніе Монтуклы. Но Деламбръ не раздѣлялъ его, хотя онъ вообще склонялся къ мнѣніямъ въ пользу Грековъ; онъ предполагалъ даже, что сочиненіе Птоломея могло быть совсѣмъ неизвѣстно Альгазену, такъ

---

[164]) Напечатано въ Базелѣ въ 1572 году вмѣстѣ съ третьимъ изданіемъ Оптики Вителліо подъ заглавіемъ: *Opticae thesaurus. Alhazeni Arabis libri septem, nunc primum editi. Ejusdem liber de crepusculis et nubium ascensionibus. Item Vitellionis Thuringo-Poloni libri decem, a Fr. Risnero*, in. fol.

какъ собственное сочиненіе послѣдняго гораздо совершеннѣе [165]). Какъ бы то ни было, сочиненіе Альгазена дѣлаетъ честь Арабамъ и мы должны его разсматривать какъ основу нашихъ познаній въ Оптикѣ. Польскій геометръ Вителліо, одинъ изъ ученѣйшихъ людей 13-го столѣтія, пользовался этимъ сочиненіемъ при составленіи своей Оптики, первой, написанной европейскимъ геометромъ.

Мы обязаны Седильо знакомствомъ съ новымъ оригинальнымъ сочиненіемъ Арабовъ, именно съ трактатомъ Гассана бенъ Хайтема *о извѣстныхъ въ геометріи* (*Traité des connues géométriques*) [166]).

Этотъ геометръ процвѣталъ около 1009 года и умеръ въ Каирѣ въ 1038 году. Онъ написалъ комментаріи къ Альмагесту и къ опредѣленіямъ, съ которыхъ начинаются элементы Евклида.

Его *трактатъ о извѣстныхъ* раздѣленъ на двѣ книги. „Первая, говоритъ онъ, содержитъ совершенно новаго рода „предметы, которые никогда не были извѣстны древнимъ „геометрамъ; во второй же заключается рядъ предложеній „сходныхъ съ тѣми, которыя находятся въ первой книгѣ „*Data*, но которыхъ нѣтъ въ этомъ сочиненіи Евклида".

Подъ рубрикой *Prolegomena* авторъ излагаетъ метафизическое разсужденіе о опредѣленіи *извѣстныхъ*, о ихъ раздѣленіи и подраздѣленіи, и о свойствѣ тѣхъ количествъ, къ которымъ *извѣстныя* относятся.

По этимъ вступительнымъ разсужденіямъ, говоритъ Седильо, характеризующимъ духъ ученыхъ во время Гассана

---

[165]) *Histoire de l'astronomie ancienne*, T. II, p. 412.

[166]) *Nouveau journal asiatique*, Mai, 1834.

Рукопись, съ которой Седильо сдѣлалъ свой переводъ, отмѣчена 3-мъ іюня 1144 года; въ королевской библіотекѣ она находится подъ № 1104 вмѣстѣ съ шестью другими арабскими сочиненіями по математикѣ. Седильо обѣщалъ издать и эти сочиненія, изъ которыхъ одно,— именно вышеупомянутый отрывокъ по алгебрѣ о рѣшеніи уравненій третьей степени,—будетъ важнѣйшимъ памятникомъ для исторіи математики у Арабовъ.

бенъ Хайтема, можно достаточно точно оцѣнить математическую философію Арабовъ.

Но ученый переводчикъ передаетъ намъ только начало *Prolegomena* и мы не видимъ, какое значеніе могли имѣть эти тонкія различія для геометрическихъ предложеній, составляющихъ существенный предметъ сочиненія. Безъ сомнѣнія различія эти относятся къ формѣ, въ которой авторъ излагаетъ свои предложенія. Но указываетъ ли онъ пользу такой особой формы, также какъ научный характеръ и истинное значеніе предложеній? Знать это было бы въ особенности важно.

Форма предложеній такова же какъ въ *Data* Евклида, такъ что сочиненіе есть ничто иное, какъ подражаніе и продолженіе *Data*; съ тѣмъ впрочемъ различіемъ, что предложенія первой книги суть „предметы совершенно новаго рода, неизвѣстнаго древнимъ“ и относятся къ предложеніямъ о геометрическихъ мѣстахъ, тогда какъ предложенія Евклида суть обыкновенныя теоремы, въ которыхъ все опредѣлено.

Цѣлію предложеній въ *Data* Евклида было доказать, что нѣкоторый предметъ (точка, прямая, или число), получаемый чрезъ данное построеніе, или изъ данныхъ условій, совершенно опредѣленъ, и затѣмъ найти этотъ предметъ по величинѣ и положенію.

Такова же цѣль предложеній первой книги „*извѣстныхъ*“ Гассана бенъ Хайтема, но тутъ въ условіяхъ каждой задачи входитъ неопредѣленность, приводящая къ изслѣдованію *геометрическаго мѣста*.

Предложенія эти двоякаго рода.

Въ однихъ требуется доказать, что нѣкоторое *геометрическое мѣсто* совершенно опредѣлено, когда оно является послѣдовательностію точекъ, удовлетворяющихъ даннымъ условіямъ, и затѣмъ требуется найти прямое и непосредственное построеніе этого мѣста.

Вотъ выраженіе одного изъ предложеній этого рода:

Изъ двухъ извѣстныхъ по положенію точекъ проводимъ двѣ прямыя линіи, пересѣкающіяся въ нѣкоторой точкѣ подъ извѣстнымъ угломъ; если одну изъ этихъ линій продолжимъ потомъ такъ, чтобы длина ея находилась съ продолженіемъ въ извѣстномъ постоянномъ отношеніи, то конецъ продолженія будетъ находиться на окружности круга, извѣстнаго по положенію. (Lib. I, Prop. VII).

Во всѣхъ такихъ предложеніяхъ геометрическое мѣсто есть или прямая линія, или кругъ. Они кажется вообще заимствованы изъ *Loca plana* Аполлонія.

Въ предложеніяхъ другаго рода ищется не самое геометрическое мѣсто, а что нибудь къ нему относящееся и что, вслѣдствіе неопредѣленности построенія, принадлежитъ безконечному множеству точекъ или линій. Напримѣръ:

Изъ двухъ касающихся круговъ одинъ лежитъ внутри другаго; къ меньшему кругу проводимъ касательную, конецъ которой (не точка прикосновенія) находится на большемъ кругѣ; если соединимъ этотъ конецъ съ точкою прикосновенія обоихъ круговъ, то отношеніе послѣдней линіи къ касательной будетъ извѣстно. (Prop. XIX).

Послѣднее предложеніе и другія подобныя ему относятся, какъ мы видимъ, къ тому же роду предложеній, какъ и поризмы Евклида по воззрѣнію Р. Симсона.

Первыя же предложенія, отличающіяся тѣмъ, что въ нихъ ищется геометрическое мѣсто, соотвѣтствуютъ идеѣ, которую мы составили себѣ о характерѣ и истинномъ значеніи поризмъ, прежде нежели намъ сдѣлалось извѣстно сочиненіе арабскаго геометра (См. Прим. III).

Сочиненіе это до сихъ поръ есть единственное, представляющее намъ аналогію, или по крайней мѣрѣ нѣкоторое сходство, съ знаменитыми книгами Евклида о поризмахъ. Это обстоятельство уже само по себѣ придаетъ ему значеніе въ нашихъ глазахъ; и открытіе этого сочиненія, подтверждающее въ нѣкоторой степени мнѣніе ученаго гео-

метра Гастильона, думавшаго, что сочиненіе Евклида еще существовало на востокѣ въ XIII столѣтіи, позволяетъ по крайней мѣрѣ надѣяться, что между многочисленными арабскими рукописями, которыя до сихъ поръ лежатъ неразобранныя въ библіотекахъ, найдутся нѣкоторые слѣды ученія о поризмахъ. Не знаемъ, относится ли къ этой теоріи одно сочиненіе Тебита бенъ Кораха, указанное въ каталогѣ восточныхъ рукописей Лейденской библіотеки подъ заглавіемъ: *Datorum sive determinatorum liber continens problemata geometrica.* Сочиненіе это по заглавію и по имени автора должно привлечь вниманіе геометровъ, знающихъ арабскій языкъ.

Всѣ предложенія второй книги „*извѣстныхъ*" одного рода съ предложеніями Евклида, хотя и не одни и тѣ же; какъ тѣ такъ и другія относятся къ элементарной геометріи (къ прямой линіи и кругу), хотя нѣкоторыя представляютъ большую степень трудности. Они въ родѣ тѣхъ задачъ, которыя въ настоящее время предлагаются для упражненія ученикамъ, уже усвоившимъ себѣ элементы геометріи. Приводимъ слѣдующія:

Въ треугольникѣ, котораго стороны и уголъ извѣстны, проводимъ отъ вершины къ основанію прямую линію; если извѣстно отношеніе квадрата этой линіи къ прямоугольнику изъ двухъ отрѣзковъ основанія, то и положеніе линіи будетъ извѣстно. (Prop. XV).

Черезъ двѣ точки взятыя на окружности круга даннаго по величинѣ и положенію, проводимъ двѣ прямыя, пересѣкающіяся на окружности; если извѣстно произведеніе этихъ двухъ линій, то и каждая изъ нихъ по величинѣ и положенію будетъ извѣстна. (Prop. XXII).

Если къ двумъ кругамъ, извѣстнымъ по величинѣ и положенію, проведемъ прямую касающуюся обоихъ круговъ, то эта прямая также будетъ извѣстна по величинѣ и положенію. (Prop. XXIV и XXV—послѣднія предложенія въ сочиненіи).

„Всѣ эти вещи, говоритъ въ концѣ Гассанъ бенъ Хайтемъ, „весьма полезны при рѣшеніи геометрическихъ задачъ и не „были высказаны ни однимъ изъ древнихъ геометровъ".

По своему характеру сочиненіе это заслуживаетъ быть поставленнымъ съ одной стороны между *Data* и *Porismata* Евклида и между *Loca plana* Аполлонія, съ другой стороны между сочиненіями Р. Симсона и Стеварта; подобно имъ оно заключаетъ въ себѣ *дополненія* къ элементарной геометріи, назначаемыя для облегченія при рѣшеніи задачъ.

Нѣкоторые думали найти въ этомъ сочиненіи Гассана бенъ Хайтема аналогію съ геометріею положенія, какъ ее понимали Д'Аламбертъ и Карно. Но мы не можемъ признать подобной аналогіи между мнѣніемъ Д'Аламберта, который самъ видѣлъ въ этой наукѣ особенность, противорѣчащую характеру алгебры [167]), между *Géométrie de position* Карно и между сочиненіемъ арабскаго геометра. Карно въ своей геометріи положенія имѣлъ главнымъ образомъ въ виду установить правильную теорію *отрицательныхъ* количествъ и его геометрія положенія по его собственному воззрѣнію и на самомъ дѣлѣ была ничто иное какъ обыкновенная геометрія, въ которой, согласно съ его ученіемъ объ отрицательныхъ количествахъ, каждое доказательство, выведенное для достаточно общаго случая, можетъ быть непосредственно и безъ всякихъ новыхъ пріемовъ прилагаемо ко всякой другой формѣ фигуры [168]).

---

[167]) „Было бы желательно изыскать средство вводитъ *положеніе* въ „вычисленія задачъ, что въ большинствѣ случаевъ значительно упростило бы ихъ; но состояніе и самое свойство анализа, кажется, не „допускаютъ этого". (*Encyclopädie*, Art. *Situation*).

[168]) Это было существенное нововведеніе, которое за нѣсколько лѣтъ не было бы допущено двумя математиками, избравшими спеціальнымъ предметомъ своихъ работъ чистую геометрію и ей обязанные своею извѣстностію. Мы говоримъ о Р. Симсонѣ и Стевартѣ, которые для каждаго предложенія давали столько доказательствъ, сколько различныхъ формъ могла допускать разсматриваемая фигура вслѣдствіе различнаго расположенія ея частей. Карно, напротивъ того, доказавъ предложеніе для фигуры въ ея общемъ состояніи, показываетъ затѣмъ,

Благодаря этому новому характеру общности, простоты и краткости и свойству теорій и многочисленныхъ предложеній, заключающихся въ сочиненіи Карно, сочиненіе это пріобрѣло свое научное значеніе и имѣло счастливое вліяніе на успѣхи чистой геометріи.

Не основываясь на идеѣ Д'Аламберта, сочиненіе Карно не представляетъ никакой аналогіи съ сочиненіемъ арабскаго геометра *„о извѣстныхъ въ геометріи“*.

Не можемъ кончить нашего обзора трудовъ Арабовъ по геометріи, не сказавъ слова о знаменитомъ персидскомъ астрономѣ и геометрѣ Нассиръ Эддинѣ изъ Фузы (1201—1274), котораго сочиненія, написанныя на арабскомъ языкѣ, обнимаютъ всѣ отрасли человѣческаго знанія. Въ нихъ находимъ, за исключеніемъ трудовъ относящихся къ астрономіи, переводы многихъ греческихъ сочиненій Евклида, Архимеда и Ѳеодосія, сочиненіе по алгебрѣ и *Compendium* ариѳметики и алгебры. Изъ всѣхъ этихъ трудовъ только элементы Евклида были изданы знаменитою книгопечатней Медичи (Roma, 1594, in fol.) съ присоединеніемъ комментарія Нассиръ Эддина,—комментарія, пользующагося уваженіемъ и принесшаго пользу многимъ писателямъ въ то время, когда арабскій языкъ былъ болѣе распространенъ, чѣмъ теперь; ибо въ этомъ комментаріѣ содержатся многія новыя доказательства предложеній Евклида. Особенно замѣчательно здѣсь доказательство пятаго постулата, которое Валлисъ находилъ остроумнымъ и воспроизвелъ во II части своего сочиненія.

Изъ всего предыдущаго мы выводимъ слѣдующія заключенія:

какъ должны измѣниться предложеніе и выражающія его или относящіяся къ нему формулы, когда фигура измѣняется вслѣдствіе измѣненія въ положеніи ея различныхъ частей. Новыя формулы которыя онъ называетъ *соотвѣтственными* (*correlatives*) первой и которыя онъ выводитъ непосредственно, безъ всякаго новаго доказательства, доказывались бы Симсономъ и Стевартомъ прямо, точно также, какъ и начальное предложеніе.

Арабы выказали большое уваженіе и рѣшительную наклонность къ наукамъ математическимъ.

Они обладали полнымъ знаніемъ сочиненій и науки греческихъ геометровъ.

Они значительно усовершенствовали тригонометрію и эта часть геометріи получила у нихъ новую форму, существенно необходимую для дальнѣйшихъ успѣховъ астрономіи.

Въ другихъ отдѣлахъ геометріи они повидимому не шли далѣе Грековъ, потому ли, что не одарены были изобрѣтательностію, или потому, что, пріобрѣтши весьма быстро значительныя познанія во всѣхъ наукахъ, они не заботились о дальнѣйшемъ расширеніи границъ знанія.

Но въ другомъ отношеніи они имѣли существенное преимущество передъ Греками:

Они обладали алгеброю Индѣйцевъ и знали приложенія ея къ геометріи.

Изслѣдованія ихъ въ этомъ родѣ доходятъ до рѣшенія уравненій третьей степени посредствомъ геометрическихъ построеній.

Наконецъ, изслѣдуя геометрію Грековъ и алгебру Индѣйцевъ одну при помощи другой и благодаря взаимной поддержкѣ, оказываемой этими двумя отраслями науки, Арабы сообщили математическимъ наукамъ тотъ особый и оригинальный характеръ, который перешелъ къ Европейцамъ и въ рукахъ ихъ послужилъ въ XVI столѣтіи основою быстро развившагося превосходства новой науки передъ наукою древнихъ.

Геометрія у западныхъ народовъ въ средніе вѣка.

Въ то время, какъ Арабы проходили быстрый и блестящій путь въ дѣлѣ науки, Европейцы были еще погружены въ полное невѣдѣніе. Послѣ Исидора Севильскаго, котораго мы послѣдняго упомянули при обзорѣ геометріи у Римлянъ, до 12-го столѣтія только очень немногіе писатели оставили намъ слабые слѣды не одной только образованности, но также и нѣкоторыхъ научныхъ познаній. Въ 12-мъ

столѣтіи выказывается первыя умственныя стремленія въ Европѣ и дѣлаются многочисленныя попытки перенести сюда древнюю науку Грековъ, сохраненную и пополненную Арабами. Движеніе это повторяется съ новою силой въ срединѣ 15-го столѣтія и съ этого времени, подъ руководствомъ знанія, почерпнутаго изъ греческихъ рукописей, подготовляются великія открытія 16-го вѣка, которыя служатъ началомъ неизмѣримаго превосходства новыхъ народовъ передъ древними въ области математики.

Бросимъ бѣглый взглядъ на труды по геометріи, явившіеся впродолженіе этого 800-лѣтняго періода.

8-е столѣтіе. Въ началѣ 8-го вѣка отличался большимъ для своего времени образованіемъ Беда, который писалъ о различныхъ предметахъ. Къ математикѣ относятся слѣдующія его сочиненія: 1) Двѣ статьи о теоретической и практической музыкѣ. 2) Различныя сочиненія по астрономіи, изъ которыхъ замѣчательнѣе другихъ: небольшая статья *De circulis sphaerae et polo*, статья по гномоникѣ подъ заглавіемъ *De mensura horologii* и сочиненіе *De astrolabio*, въ которомъ употребляются графическія построенія. 3) Наконецъ нѣсколько статей по ариѳметикѣ. Одно сочиненіе, называемое *De arithmeticis numeris*, есть весьма сжатый перечень опредѣленій, заимствованныхъ изъ сочиненій по ариѳметикѣ Апулея и Боэція, имена которыхъ Беда приводитъ самъ. Другое—*De loquela per gestum digitorum*—научаетъ счету по пальцамъ и ихъ сочлененіямъ. Этой книгой пользовались и воспроизводили ее различные писатели.

Третье, — представляющее кажется изъ всего объемистаго собранія сочиненій Беда наиболѣе интереса въ настоящее время, — есть статья *De numerorum divisione*, на которую до послѣдняго времени такъ мало обращалось вниманія, что писатели дававшіе объ ней отчетъ, перепутывали ея содержаніе [169]). Это именно та статья, которая слѣ-

---

[169]) Montucla, *Histoire des mathématiques*, T. I, p. 495: „Беда издалъ книгу объ ариѳметикѣ подъ заглавіемъ *De numeris* и еще другую *De numerorum divisione*, изъ чего видно, какъ затруднительны еще были

дуетъ за письмомъ Герберта къ Константину и въ которой предполагали вообще изложеніе нашей системы счисленія. Принадлежитъ ли эта статья Беда или Герберту? Мы уже устранили этотъ вопросъ, когда говорили о томъ мѣстѣ геометріи Боэція, которое относится къ системѣ счисленія; статья представляется по видимому заимствованіемъ и развитіемъ этого мѣста; по крайней мѣрѣ въ ней говорится о томъ же предметѣ и по нашему мнѣнію она имѣетъ то же происхожденіе [170]. Также какъ и въ рукописяхъ Боэція, въ старыхъ спискахъ статьи Беда мы находимъ арабскія цифры (Wallis, *de algebra tractatus*, cap. IV).

Наконецъ, между сочиненіями Беда есть книга *De arithmeticis propositionibus*, гдѣ мы сначала встрѣчаемъ различные способы отгадывать задуманное число, а потомъ находимъ довольно большое число ариѳметическихъ задачъ *ad acuendos juvenes*, какъ выражается Беда, обнаруживающихъ

въ его время подобныя дѣйствія".—Delambre, *Histoire de l'astronomie ancienne*, T. I, p. 322: „Въ этой главѣ (*De divisione numerorum*) Беда показываетъ, какъ пользоваться пальцами и ихъ сочлененіями, чтобы облегчить дѣленіе и умноженіе".

[170]) Постараемся здѣсь исправить ошибку, въ которую мы впали прежде, сказавъ, будто никто еще не замѣтилъ, что письмо Герберта находится въ сочиненіяхъ Беда. Мы тогда не обратили вниманія, что замѣчаніе это было сдѣлано Андресомъ (Andres) въ сочиненіи: *Dell' origine, de progressi, e dello stato attuale d'ogni litteratura*, Parma 7 Vol. in—4°, 1799, гдѣ онъ выражается такъ: *Ma e da osservarsi, cio che non vedo riflettuto ne da matematici, ne da critici, che tale lettera riportata fra le Gerberziane e quella medesima affatto, che si ritrova nelle opere di Beda al principio del libro De numerorum divisione ad Constantinum; ne io voglio decidere se sia da riporsi fra le opere di Gerberto ovver fra quelle di Beda* (T. IV, p. 53).

Но Андресъ говоритъ только о самомъ письмѣ, а не о слѣдующей за нимъ статьѣ, которая ему была извѣстна въ сочиненіи Беда, но о корой онъ не зналъ, что она приписывается Герберту.

Прибавимъ еще, что этотъ ученый историкъ подробно комментировалъ упомянутое мѣсто изъ Боэція съ цѣлію доказать, что оно никоимъ образомъ не можетъ относиться къ нашей системѣ счисленія (T. IV, p. 41—45), но не замѣтилъ аналогіи его съ сказанною статьею *De numerorum divisione*.

намѣренія поддержать математическое образованіе. Но изъ правилъ, которыми пользуется авторъ для вычисленія площадей треугольника и четыреугольника видно, въ какомъ жалкомъ видѣ ему удалось это сдѣлать. Мы приводили эти правила, когда говорили о сочиненіяхъ Брамегупты.

Книга *De arithmeticis propositionibus* приписывалась также Алкуину и помѣщалась между его сочиненіями. Но вопросъ, кто былъ дѣйствительно ея авторомъ, не представляетъ для насъ интереса.

Алкуинъ, ученикъ Беда, считался подобно ему чудомъ учености въ свое время. Достаточно сказать, что онъ писалъ о всѣхъ семи свободныхъ искуствахъ и преимущественно объ астрономіи. До насъ дошла только часть его сочиненій, относящаяся къ грамматикѣ и реторикѣ; признано, что эти сочиненія представляютъ заимствованія изъ Кассіодора. Знаменитость Алкуина между прочимъ происходитъ отъ того, что онъ принималъ большое участіе какъ въ учрежденіи университетовъ въ Парижѣ и Павіи, такъ и въ стремленіяхъ Карла Великаго противодѣйствовать дальнѣйшему распространенію мрака, лежавшаго на Европѣ, и возбудить снова пламя науки.

Но явилась схоластика, и религіозный элементъ, служившій ей основою, былъ такъ всемогущъ, что исключительно поглотилъ всѣ умы. Такимъ образомъ совершилось въ исторіи обстоятельство въ высшей степени удивительное: послѣ всѣхъ стараній Карла Великаго настала именно эпоха самаго глубокаго невѣдѣнія, продолжавшаяся около двухъ столѣтій.

10-е столѣтіе. За все это время исторія называетъ только имена Герберта (сдѣлался папой въ 999, умеръ въ 1003 году) и нѣкоторыхъ его учениковъ. Монахъ Гербертъ, по образцу греческихъ мудрецовъ, ѣздившихъ для своего образованія въ Египетъ, отправился съ тою же цѣлію въ Испанію, — единственное мѣсто въ Европѣ, гдѣ разрабатывались Сарацинами науки, перенесенныя съ востока. По возвращеніи во Францію онъ ревностно распространялъ

свои познанія, которыя считались чудомъ у его современниковъ, такъ что его обвиняли даже въ магіи. Но это показываетъ только, какъ глубоко было въ то время невѣжество; ибо нельзя не признаться, что сочиненіе Герберта по геометріи и статьи его о сферѣ, объ астролябіи и о солнечныхъ часахъ касаются только самыхъ элементарныхъ вопросовъ науки и обнаруживаютъ лишь весьма поверхностныя свѣдѣнія. Несоотвѣтствіе этихъ сочиненій съ весьма развитымъ состояніемъ науки въ это время у Арабовъ Севильи и Кордовы заставляетъ даже сомнѣваться, отъ нихъ ли получилъ Гербертъ свои знанія, хотя это и повторяютъ обыкновенно вслѣдъ за Вильгельмомъ Малесбюри. Въ этихъ сочиненіяхъ и особенно въ геометріи видно скорѣе заимствованіе и объясненіе сочиненій Боэція, нежели перенесеніе науки и методовъ Арабовъ [171]), первые слѣды котораго мы встрѣчаемъ во Франціи только въ 12-мъ столѣтіи.

---

[171]) Замѣчаніе это согласно съ мнѣніемъ Гуже (Goujet), который говоритъ, что предположеніе о пушествіи Герберта въ Испанію имѣетъ основаніе, но что цѣль путешествія, обыкновенно указываемая, не доказана. (*De l'etat des sciences en France depuis la mort de Charlémagne jusqu'à celle du roi Robert*, p. 55).

Напротивъ того Андресъ, который придаетъ большое историческое значеніе знаніямъ и трудамъ Герберта, приписываетъ имъ арабское происхожденіе, предполагая, что Гербертъ получилъ ихъ не прямо отъ Сарациновъ, но скорѣе отъ ихъ учениковъ, испанскихъ христіанъ, которые не могли научить ничему другому, какъ наукѣ и методамъ Арабовъ. „*Queste ragioni mi fanno congetturare non senza qualche probabilita, chè quel dotto e grand'uomo che fu Gerberto tutto egli si fècè sotto la disciplina de' christiani spagnuoli, senza avere avuto bisogno di mendicare il soccorso dellē scuolè de' Saraceni. Ma quantunque spagnuoli fossero i maestri di Gerberto, arabica pur èra la dottrina ch' ei trasse dalle Spagnè e comunico alle Gallie ed all' Italia. La. scienza favorita di lui era la matematica; e la matematica, que si sapeva in Ispagna, tutta venive delle scuole e da libri de' Saraceni. Si vero e, che Gerberto della Spagna alle scuole Europee recasse l'aritmetica arábica, colla quale facili divenivano molte operazioni, che nell'antico metodo troppo erano, imbarazzanti, questa immediatamente, o per mezzo de'maestri spagnuoli rapita fu da lui a Saraceni, come dice Gugliemo*

Предлагаемъ разборъ сочиненія Герберта по геометріи, которое было издано Бернардомъ Пецомъ (Bernard Pez) и помѣщено въ его *Thesaurus anecdotorum novissimus* (Augustae Vindelicorum, 1721, in fol.) Tom. III, Pars II.

Предложивъ первыя опредѣленія, относящіяся къ геометріи, Гербертъ знакомитъ съ мѣрами, бывшими въ употребленіи у древнихъ; именно съ римскими *digitus*, *uncia*, *palmus*, *sexta*, *dodrans* и пр., перечень которыхъ находится въ геометріи Боэція. Во всемъ сочиненіи Гербертъ употребляетъ эти мѣры, также какъ и изображающіе ихъ знаки, которыми выражаются также и отвлеченныя *дроби*, въ родѣ $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ и т. п. Для означенія верхняго основанія въ четвереугольникѣ онъ употребляетъ слово *coraustus*. Посвящаетъ нѣсколько главъ прямоугольнымъ треугольникамъ, которые онъ называетъ *trianguli pythagorici*, и показываетъ построеніе ихъ въ раціональныхъ числахъ, когда дана одна изъ сторонъ. При этомъ онъ прилагаетъ извѣстныя правила, приписываемыя Пиѳагору и Платону, помощію которыхъ получаются для сторонъ цѣлыя числа, и отчасти другія правила, приводящія къ дробямъ. Какъ тѣ, такъ и другія, совершенно одного рода и выводятся изъ общихъ правилъ, найденныхъ нами въ индѣйскихъ сочиненіяхъ. Относительно прямоугольнаго треугольника Гербертъ рѣшаетъ замѣчательную для того времени задачу, зависящую отъ уравненія второй степени, именно: найти катеты по данной площади и гипотенузѣ. Пусть будетъ A — площадь, c — гипотенуза; рѣшеніе Герберта, переведенное на формулу, даетъ для катетовъ слѣдующее двойственное выраженіе:

$$\frac{1}{2}\left[\sqrt{c^2 + 4A} \pm \sqrt{c^2 - 4A}\right].$$

---

di Malesburi". (*Dell'origine, de progressi*, etc. T. I, cap. IX).—Свойство сочиненій Герберта не позволяетъ намъ раздѣлять это мнѣніе о происхожденіи знаній Герберта.

Затѣмъ онъ научаетъ при помощи астролябіи и другаго инструмента, который онъ называетъ *Horoscop*, опредѣлять высоту башни, глубину колодца и измѣрять разстояніе до недоступнаго предмета. Потомъ вычисляетъ перпендикуляръ въ треугольникѣ, стороны котораго извѣстны. Для длины сторонъ онъ беретъ числа 13, 14 и 15. Даетъ для площади правильнаго многоугольника невѣрную формулу римскихъ землемѣровъ и, подобно имъ, рѣшаетъ обратную задачу: *по данной площади правильнаго многоугольника найти его сторону*. Говоря о кругѣ, даетъ отношеніе окружности къ діаметру: $\frac{22}{7}$. Въ главахъ подъ заглавіемъ *In campo quadrangulo agripennos cognoscere* и *In campo triangulo agripennos invenire*, находятся невѣрныя правила для измѣренія площадей четыреугольника и треугольника, которыя мы указали уже по поводу сочиненій Беда; Гербертъ употребляетъ въ примѣрахъ тѣже самыя числа, какъ и Беда. Наконецъ находимъ (Cap. 85) формулу, выражающую сумму членовъ ариѳметической прогрессіи [172]). Формулы, выражающей площадь треугольника въ функціи трехъ сторонъ, нѣтъ; но есть другая, невѣрная, формула для прямоугольнаго треугольника.

За геометріей слѣдуетъ небольшое сочиненіе подъ заглавіемъ: *Gerberti epistola ad Adalboldum de causa diversitatis arearum in trigono aequilatero geometrice arithmeticeve expenso*. Гербертъ объясняетъ, что геометрическая формула $\frac{a^2}{4}.\sqrt{3}$ для площади равносторонняго треугольника точна, ариѳметическая же формула $\frac{a^2+a}{2}$ не точна, а только приближенна.

[172]) Виллуазонъ (Villoison) говоритъ, что въ одной очень старой рукописи въ 85-й главѣ находятся арабскія цифры. (См. *Analecta graeca*, T. II, p. 153). Но мы должны сказать, что въ двухъ рукописяхъ Герберта, находящихся въ Парижской королевской библіотекѣ (№ 7185 и 7377), мы видѣли только римскія цифры и знаки, помощію которыхъ у Римлянъ изображались дроби. Эти знаки вѣрно переданы Пецомъ въ его изданіи геометріи Герберта.

Въ своемъ объясненіи Гербертъ дѣлаетъ ошибку: изъ его разсужденій видно, что они относятся къ формулѣ $\frac{a^2 + a}{2} \frac{\sqrt{3}}{2}$, которая дѣйствительно есть приближенная. Въ самомъ дѣлѣ, преобразуя ее въ однородную чрезъ введеніе единицы длины, которую означимъ черезъ b, мы получаемъ $\frac{a^2 + ab}{2} \frac{\sqrt{3}}{2}$ — формулу, которая тѣмъ болѣе приближается къ истинному выраженію площади $\frac{a^2}{4} \sqrt{3}$, чѣмъ менѣе будетъ b.

Изъ этого разбора геометріи Герберта видно, что она составлена на подобіе сочиненій Боэція и Беда и въ ней нельзя признать арабскаго происхожденія, которое приписывается поверхностно и безъ критики научнымъ познаніямъ ея сочинителя.

Гербертъ повидимому писалъ много объ ариѳметикѣ, преимущественно о системѣ счисленія, отличавшейся отъ бывшей въ то время въ употребленіи латинской системы, и, благодаря главнымъ образомъ этому обстоятельству, имя его стало столь знаменито въ исторіи науки. По поводу извѣстнаго мѣста въ геометріи Боэція мы говорили уже о приписываемой Герберту статьѣ *De numerorum divisione* [173]); тамъ мы замѣтили, что статья эта помѣщена въ двухъ изданіяхъ сочиненій Беда, и на основаніи этого высказали предположеніе, что статья эта можетъ быть приписана послѣднему. Но Гербертъ и ученики его оставили еще много другихъ сочиненій объ томъ же предметѣ, изъ которыхъ видно, что тогда имѣлись уже значительныя свѣдѣнія о вычисленіяхъ по этой системѣ, называвшейся системой *Abacus'* а. Этого рода сочиненія Герберта, хранящіяся большею частію въ Библіотекѣ Ватикана, озаглавлены такъ; 1) *Gerberti scholastici Abacus compositus*; 2) *De numeris*; 3) *Regulae Abaci*; 4) *Fragmentum Gerberti regulae de Abaco*; 5) *Gerberti*

---

[173]) Первый издатель писемъ Герберта помѣстилъ послѣ 161-го и послѣдняго письма первыя строки этой статьи. Второй издатель сохранилъ письмо, но выкинулъ эти первыя строки.

arithmetica. Первое сочиненіе, *Abacus compositus*, существуетъ еще во многихъ другихъ бібліотекахъ. Въ библіотекѣ Ст. Эмеранскаго аббатства въ Регенсбургѣ Пецъ нашелъ это сочиненіе съ присоединенною къ нему статьею: *G. liber subtillissimus de Arithmetica*, которую онъ основываясь на начальной буквѣ *G.* приписалъ Герберту. Въ этой Регенсбургской рукописи статья *Abacus* называется также *Algorismus*; она посвящена Оттону III [174]). Въ Лейденской библіотекѣ есть также двѣ рукописи, доставшіяся отъ Скалигера и Воссія; одна съ заглавіемъ: *Libellus multiplicationum, in quo epistola Gerberti ad Constantinum de doctrina Abaci*; другая—*Gerberti de Divisionibus cum notis ad illas. (Catalogus Bibliothecae Universitatis Lugduno-Batavae*, p. 341 et 390).

Что касается до статьи *De numerorum divisione*, то удивительно, что ее нѣтъ подъ этимъ заглавіемъ ни въ одномъ большомъ книгохранилищѣ, или, что вѣрнѣе, она покрайней мѣрѣ не упомянута съ такимъ заглавіемъ ни въ одномъ изъ каталоговъ. Это обстоятельство способствовало нашему предположенію, что статья эта могла принадлежать Беда, хотя мы вполнѣ сознаемъ, что способы исчисленія, излагаемыя въ ней, были извѣстны Герберту [175]).

Но кто бы ни былъ авторъ ея, мы утверждаемъ, что надо разсматривать ее какъ заимствованіе отрывка изъ Боэція о томъ же предметѣ и думать, что она касается системы счисленія, отличающейся отъ нашей современной только въ од-

---

[174]) *Gerberti Abacus seu Algorismus ad Ottonem imperatorem*. (См. *Thesaurus anecdotorum novissimus*, T. I, *Dissertatio isagogica*, p. XXXVIII).

[175]) Два экземпляра этой статьи, находящіеся подъ другимъ названіемъ въ Парижской Королевской библіотекѣ, сопровождаются именемъ Герберта, которое приписано конечно въ позднѣйшее время. Первый экземпляръ озаглавленъ: *Rationes numerorum Abaci* (Manuscr. № 6620), а второй *Tractatus de Abaco* (№ 7189, A). Мы полагаемъ, что часть рукописей, упомянутыхъ нами выше, и въ особенности рукописей Лейденской библіотеки суть также ничто иное, какъ списки статьи *De numerorum divisione*.

номъ, именно въ *употребленіи нуля*, которое введено было позднѣе и повело за собою уничтоженіе столбцовъ. При такомъ воззрѣніи остается неразрѣшеннымъ только одинъ вопросъ относительно *Abacus*' а: было ли это удачное нововведеніе —употребленіе нуля—прямымъ усовершенствованіемъ системы *Abacus*' а, или же Европейцы заимствовали его изъ арабской ариѳметики въ 11-мъ или въ 12-мъ столѣтіи?

Многіе изъ современниковъ Герберта, которыхъ считаютъ обыкновенно его учениками, писали также объ ариѳметикѣ, какъ о примѣненіи системы *Abacus*' а; таковы Адальбольдъ, епископъ Утрехтскій, Геригеръ аббатъ Лаубскій и Бернелинъ.

Въ библіотекѣ Ватикана еще сохранилась книга перваго изъ нихъ подъ заглавіемъ *Adalboldi ad Gerbertum scholasticum de Astronomia, seu Abaco* [176]) У Пеца въ *Thesaurus anecdotorum novissimus* (T. III, 2, p. 86) находимъ другое сочиненіе Адальбольда подъ названіемъ: *Libellus de ratione inveniendi crassitudinem sphaerae*, гдѣ онъ даетъ для объема шара формулу $D^3 \frac{11}{21}$ (D означаетъ діаметръ), въ которой за основаніе принято отношеніе Архимеда. Въ дѣйствіяхъ надъ числами Адальбольдъ, какъ и Гербертъ, употребляетъ римскіе знаки, выражающіе дроби $^1/_3$, $^2/_3$ и т. д.

Геригеръ комментировалъ *Abacus* Герберта въ сочиненіи, которое хранится въ Лейденской библіотекѣ подъ заглавіемъ: *Ratio Abaci secundum divum Herigerum* [177]).

Бернелинъ издалъ сочиненіе о музыкѣ, геометріи и ариѳметикѣ, которое записано въ библіотекѣ Ватикана подъ названіемъ: *Bernelini Abaci, Musica, Arithmetica et Geometлia* [178]); потомъ еще сочиненіе въ четырехъ книжкахъ: *De Abaco et numeris*; Винье (Vignier) въ *Bibliotheque historiale*

[176]) Montfaucon, *Bibliotheca bibliothecarum manuscriptorum nova*, t. I, p. 87.

[177]) *Histoire littéraire de la France*, t. 7, p. 206.

[178] Montfaucon *ibid.* t. I, p. 24. Кромѣ того на стр. 116 узнаемъ, что Ватиканская библіотека имѣетъ еще нѣсколько сочиненій того же писателя подъ заглавіемъ: *Bernelinus junior de Abaco et alia pluria.*

удостовѣряетъ, что сочиненіе это находится во владѣніи у знаменититаго юриста Питу (Pierre Pithou) [179]). Изъ *Histoire littéraire de la France*, Т. III, написанной въ 1773 году, мы узнаемъ, что одинъ экземпляръ этого сочиненія находился въ то время въ Парижѣ, въ аббатствѣ St Victor. Предисловіе озаглавлено словами: *Incipit praefatio libri Abaci quem junior Bernelinus edidit Parisiis* [180]). Можетъ быть къ этому же изслѣдованію объ *Abacus'* ѣ относится другая статья Бернелина, которая въ Лейденской библіотекѣ помѣщена послѣ *Abacus'* а Герберта подъ заглавіемъ: *Scolica* (вѣроятно *Scholia*) *Bernelini Parisiis ad Amelium suum edita de minutiis.*

Упоминаютъ еще объ одномъ монахѣ, по имени Гальберѣ, который около того же времени также писалъ объ *Abacus'*ѣ Герберта (*Histoire littéraire de la France*, t. 7, p. 138).

Было бы въ высшей степени полезно для разъясненія историческихъ вопросовъ, касающихся нашей ариѳметики и введенія ея въ Европу и особенно касающихся системы *Abacus'*а

[179]) Приведемъ одно мѣсто изъ Винье, которое кажется не обратило на себя вниманія, по важности, которую нельзя отвергнуть; оно доказываетъ, что въ 16-мъ вѣкѣ наши цифры и нашу систему исчисленія разсматривали, если не какъ выведенныя прямо отъ *Abacus'*а, то по крайней мѣрѣ какъ происшедшія съ нимъ изъ одного источника. Это мѣсто подтверждаетъ то объясненіе, которое мы предложили по поводу *Abacus'*а Боэція. Вотъ слова Винье:

„*Gerbert eut encore un autre sien compagnon ou disciple ès sciences géométriques et mathématiques nommé Bernelinus, qui composa quatre ivres De Abaco et numeris. Desquels se peut apprendre l'origine de Chiffre dont nous usons aujourd'hui ès comptes d'arithmétique. Lesquels livres Savoye Pithou m'a assuré avoir en sa bibliothèque, et recognoistre en iceux un sçavoir et intelligence admirable de la science qu'ils traitent. Et pour ce qu'avec ceux la furent encore fort renommés au même temps en la France plusieurs autres grands personnages, à cause de leur grand sçavoir ès mêmes sciences philosophilques et mathématiques, comme,* etc.“ (*Bibliothèque historiale*, 3 Vol., in fol. Paris, 1588; Vol. II, p. 642)

[180]) Въ аббатствѣ St. Victor существуетъ еще другая статья объ *Abacus'* ѣ, упоминаемая Монфокономъ подъ заглавіемъ: *Radulphi Laudunensis de Abaco.* (*Bibl. bibl.* T. II, p. 1374).

занимающей важное мѣсто въ исторіи письменности 10-го столѣтія,—системы, которая вѣроятно только послѣ нѣсколькихъ вѣковъ забвенія возобновлена была по сочиненіямъ Боэція и другихъ того же времени писателей [181]), получившихъ ее, какъ говоритъ Боэцій [182]), изъ школы Пиѳагора, было бы въ высшей степени полезно, говорю я, если бы изданы были сочиненія Герберта и его учениковъ, сочиненія, заглавія которыхъ мы упомянули выше, и если бы обращено было вниманіе на другія подобныя сочиненія, несомнѣнно существующія въ библіотекахъ богатыхъ рукописями.

11-е столѣтіе. Въ 11-мъ слолѣтіи составилъ себѣ извѣстность Германъ Контрактъ сочиненіями по математикѣ, между которыми есть одно о квадратурѣ круга и одно объ астролябіи. Послѣднее сочиненіе, въ которомъ говорится о устройствѣ и употребленіи астролябіи, напечатано въ *The-*

---

[181]) Мы полагаемъ, напримѣръ, что Викторій, математикъ времени Боэція, писалъ также объ этой системѣ, или покрайней мѣрѣ оставилъ относящіяся къ ней вычисленія, и что къ ней относятся цитаты Герберта и учениковъ его объ исчисленіи Викторія и о краткости этого исчисленія, такъ какъ здѣсь по видимому нельзя разумѣть пасхалію, которую также вычислялъ Викторій.

[182]) Въ исторіи наукъ нерѣдко встрѣчается, что идеи, принципы, даже теоріи, по нѣскольку разъ и черезъ долгіе промежутки времени являются и снова исчезаютъ, пока не найдутъ себѣ достаточно подготовленной почвы, чтобы укорениться въ ней и обезпечить себѣ продолжительное существованіе. Звѣздчатые многоугольники представляютъ примѣръ подобныхъ перерывовъ. Сначала они разсматривались въ школѣ Пиѳагора, затѣмъ послѣ десятивѣковаго забвенія является въ геометріи Боэція *звѣздчатый пятиугольникъ*; забытая снова въ продолженіи шести столѣтій, теорія ихъ получаетъ новую жизнь, благодаря Кампану; черезъ сто лѣтъ послѣ этого возникаетъ теорія *выдающихся* многоугольниковъ; еще черезъ два столѣтія можно было подумать, что блестящая роль и прочная будущность обезпечены для этой теоріи, благодаря имени и неувядаемымъ трудамъ Кеплера; но не смотря на это, она впала опять въ полное забвеніе, продолжавшееся два столѣтія; послѣ чего достигла уже наконецъ незыблемаго существованія, обезпеченнаго ей аналитическими изслѣдованіями, слившими ее съ теоріею обыкновенныхъ многоугольниковъ.

saurus novissimus Пеца (Т. III). Валлисъ въ исторіи алгебры говоритъ, что одно мѣсто старой рукописи изъ *Bibliotheca Bodleiana* привело его къ мысли, что Герману Контракту извѣстна была наша система счисленія, и онъ ставитъ его вслѣдъ за Гербертомъ во главѣ другихъ авторовъ, писавшихъ объ этомъ предметѣ [183]).

12-е столѣтіе. Двѣнадцатый вѣкъ извѣстенъ по нѣкоторымъ усиліямъ противъ общаго невѣжества. Многіе европейцы по примѣру Герберта оставляютъ отечество, чтобы получить образованіе въ дальнихъ странахъ. Особенно извѣстны Аделардъ (Adhelard, или Athelard) и Герардъ Кремонскій (Gerard). Первый изъ нихъ посѣтилъ Испанію, Египетъ и Аравію и по возвращеніи перевелъ съ арабскаго много сочиненій и между прочимъ элементы Евклида. Это былъ первый переводъ элементовъ въ Европѣ. Твореніе Евклида было извѣстно до тѣхъ поръ только по весьма ограниченному извлеченію, содержавшему изложеніе нѣкоторыхъ теоремъ и помѣщенному въ первой книгѣ геометріи Боэція. Аделардъ къ своему переводу прибавилъ еще комментаріи

---

[183]) *Hujusce Hermanni mentionem reperio in quodam Bibliothecae Bodleianae MSO, ubi dicitur quod ab Hermanno et Prodocimo didicerint Abacum, hoc est (alio nomine) Algorismum.*

Германъ Контрактъ, въ глазахъ нѣкоторыхъ историковъ, особенно Бруккера, имѣетъ значеніе потому, что онъ усиленно изучалъ арабскій языкъ и доставилъ первые латинскіе переводы Аристотеля.

Журденъ разбирая источники этого мнѣнія, думаетъ, что оно ошибочно, или по крайней мѣрѣ недостаточно подтверждено; онъ полагаетъ, что сочиненіе Германа объ астролябіи не есть переводъ съ арабскаго, а скорѣе составлено по изданнымъ уже въ его время матеріаламъ. (*Recherchers sur l'âge et l'origine des traductions latins d'Aristote* p. 156)

Сопоставляя это сужденіе Журдена съ фактомъ, о которомъ упоминаетъ Валлисъ, мы получаемъ слѣдствіе, благопріятствующее уже нѣсколько разъ высказанному нами мнѣнію, что всѣ сочиненія объ *Abacus*'ѣ, каковы сочиненія Герберта и его учениковъ, имѣютъ тотъ же источникъ, какъ и сочиненіе Боэція, т. е. что они не прямо заимствованы изъ арабскихъ сочиненій, перенесенныхъ испанскими Сарацинами.

на предложенія Евклида. Переводъ этотъ остался въ рукописи [184])

Журденъ (Jourdain) приписываетъ Аделарду сочиненіе объ Астролябіи и ученіе объ *Abacus'*ѣ [185]). (*Recherches sur les traductions d' Aristote*, p. 100).

Герардъ изъ Кремоны (1114—1187) ѣздилъ на долгое время въ Толедо; тамъ изучилъ онъ арабскій языкъ и сдѣлалъ много переводовъ, которые привезъ съ собою въ отечество. Переводы эти относятся ко всѣмъ отдѣламъ знаній, процвѣтавшихъ у испанскихъ Мавровъ. Между ними находимъ Альмагестъ Птоломея, *Tractatus de crepusculis* Альгазена и книгу *qe scientiis* Альфарабія [186]). Журденъ думаетъ, что

---

[184]) Онъ находится въ библіотекѣ доминиканцевъ Св. Марка во Флоренціи подъ заглавіемъ: *Euclidis Geometria cum Commento Adelardi*, и въ *Bibl. Bodleiana* подъ заглавіемъ: *Euclidis elementa cum scholiis et diagrammatis latine reddita per Adelardim Bathoniensem*. Въ Парижской королевской библіотекѣ есть также копія (№ 7213 латинскихъ рукописей). Другая копія, принадлежавшая Регіомонтану, находится въ библіотекѣ въ Нюренбергѣ.

[185]) Мы не знаемъ, на какомъ авторитетѣ основывается Журденъ, говоря объ этомъ ученіи объ *Abacus'*ѣ, не знаемъ также состоитъ ли это ученіе въ томъ же, въ чемъ система *Abacus'*а Боэція и Герберта. Этотъ историческій вопросъ чрезвычайно важенъ, такъ какъ всѣ работы Аделарда имѣли цѣлію ознакомить съ философскими математическими сочиненіями Арабовъ, при чемъ авторъ признаетъ значительное преимущество этихъ сочиненій передъ схоластическими ученіями того времени; поэтому мы склонны думать, что если онъ писалъ объ ариѳметикѣ, то вѣроятно объ ариѳметикѣ Арабовъ, которая основывалась на *значеніи мѣста* цифръ, также какъ система *Abacus'*а, отъ которой она по нашему мнѣнію отличается только употребленіемъ нуля. Можетъ быть сочиненіе Аделарда представляетъ переходъ отъ системы *Abacus'*а къ арабской системѣ, указывая ихъ тождество, послѣ чего вторая система, какъ болѣе удобная для приложеній, замѣнила собою первую, получивъ названіе *Algorismus*. Поэтому сочиненіе Аделарда можетъ представлятъ особенную важность, рѣшая можетъ быть еще темный вопросъ объ истинномъ происхожденіи системы счисленія, употребляющейся уже пять или шесть столѣтій.

[186]) Первый указатель переводовъ, приписываемыхъ Герарду Кремонскому составленъ Фабриціемъ (*Bibl. med. et infimae lat.* T. 3, p.

Герарду же обязаны мы переводомъ сочиненія Альгазена о перспективѣ (*Recherches critiques sur les traductions d'Aristote*, p. 128). Сочиненіе по ариѳметикѣ, находящееся въ *Bibl. Bodleiana* подъ названіемъ *Algorismus magistri Gerardi in integris et minutiis* [187]), принадлежитъ можетъ быть также Герарду Кремонскому, который дѣйствительно, перенося изъ Испаніи часть научныхъ свѣдѣній Арабовъ, не могъ не обратить вниманія на ихъ остроумную систему счисленія, хотя она уже была достаточно извѣстна всѣмъ, посвятившимъ себя изученію наукъ. Допустить это мы считаемъ возможнымъ, принявъ въ соображеніе большое число авторовъ слѣдующаго вѣка, писавшихъ объ этой системѣ, или употреблявшихъ ее въ своихъ сочиненіяхъ.

Еще три современника Аделарда и Герарда Кремонскаго трудились надъ переводами математическихъ сочиненій, распространенныхъ у Арабовъ; именно: Платонъ изъ Тиволи (*Plato Tiburtinus*), еврей Іоаннъ Севильскій, извѣстный подъ именемъ *Iohannes Hispalensis*, и Рудольфъ изъ Брюгге, (*Brughensis*).

Первый перевелъ съ арабскаго Сферику Ѳеодосія около 1120 года (напечатана въ 1518 г.), съ еврейскаго—изложеніе геометріи Савосарды [188]) и различныя другія сочиненія.

Іоаннъ Севильскій (*Hispalensis*) перевелъ элементы астрономіи Альфрагана (по указанію Воссія и многихъ другихъ писателей въ 1142 году) и различныя сочиненія по астро-

---

115). Журденъ даетъ второй списокъ, почти вдвое болѣе длинный; сочиненія Альфарабія въ немъ нѣтъ; оно найдено Либри въ королевской библіотекѣ въ рукописи подъ заглавіемъ: *Liber Alfarabii de scientiis translatus a magistro Gherardo Cremonensi, in Toleto, de arabico in latinum.* (*Histoire des sciences mathématiques en Italie*, t. I, p. 172).

[187]) Heilbronner, *Historia matheseos*, p. 601.

[188]) *Liber Embadorum a Savosarda judaeo in hebraico compositus et a Platone Tiburtino in Latinum sermonem translatus.* (In Bibliotheca S. Marci Dominicorum Florentiae). Либри долженъ былъ помѣстить во второмъ томѣ *Histoire des sciences mathèmatiques* разборъ этого важнаго сочиненія.

логіи, къ числу которыхъ принадлежитъ сочиненіе Альбумазара, находящееся въ рукописи въ *Bibl. Magliabecchi* подъ заглавіемъ: *Liber introductorii majoris in magisterio scientiae Astrorum, editione Albumazar et interpretatione Iohannis Hispalensis ex arabico in latinum*. Переводъ этотъ оконченъ былъ вѣроятно въ 1171 году, потому что онъ заключается словами: *scriptus est liber iste anno domini nostri Jesu Christi* 1171. Онъ имѣетъ значеніе, потому что содержитъ астрономическія таблицы, написанныя арабскими цифрами [189]). Это можетъ быть самыя древнія цифры изъ написанныхъ въ точно извѣстное время. Іоаннъ Севильскій оставилъ еще сочиненіе объ арабской ариѳметикѣ подъ заглавіемъ *Algorismus*—древнѣйшее сочиненіе по ариѳметикѣ съ такимъ названіемъ, встрѣчающимся потомъ во всѣхъ сочиненіяхъ 12-го столѣтія. Оно начинается такими словами: *Incipit prologus in libro Algorismi de practica Arithmeticae, qui editus est a Magistro Iohanne Hispalensi*. Оно очень полно и обнимаетъ собою семь дѣйствій: сложеніе, вычитаніе, удвоеніе, дѣленіе пополамъ, умноженіе, дѣленіе и извлеченіе корней, сперва для цѣлыхъ чиселъ, потомъ для дробей. Тутъ же, непосредственно послѣ ариѳметики, находимъ отрывокъ алгебры, составляющій кажется часть того же сочиненія, съ заглавіемъ: *Excerptiones de libro qui dicitur Gebra et Mucabala*. [190]). Въ немъ заключается рѣшеніе уравненій второй степени и рѣшаются многія задачи, подобныя слѣдующимъ: Какое число, будучи сложено съ своимъ удесятереннымъ корнемъ, даетъ 39? Какое число, будучи придано къ 9, даетъ свой ушестеренный корень?

Сочиненіе это, остававшееся до сихъ поръ повидимому неизвѣстнымъ, имѣетъ также значеніе [191]), какъ самое древ-

---

[189]) Targioni, *Relazioni di alcuni Viaggi*, etc. t. II, p. 67.

[190]) Въ рукописи написано: *Exceptiones de libro qui dicitur Gleba et Mutabilia*, но это по всей вѣроятности происходитъ отъ ошибки переписчика.

[191]) Копіи его должно быть весьма рѣдки, такъ какъ въ каталогахъ рукописей оно нигдѣ не упоминается.

нее изъ извѣстныхъ по арабской ариѳметикѣ и алгебрѣ. До сихъ поръ древнѣйшимъ считалось сочиненіе Леонарда изъ Пизы.

Рудольфу изъ Брюгге мы обязаны знакомствомъ съ Плоскошаріемъ Птоломея, которое онъ перевелъ съ арабскаго перевода, снабженнаго комментаріями автора, по имени Мользема. Греческій текстъ до насъ не дошелъ. Сочиненіе Рудольфа напечатано въ первый разъ въ 1507 г. въ концѣ Птоломеевой Географіи (Roma, in fol.) и потомъ въ 1536 г. [192]). Правильный переводъ сдѣланъ былъ Коммандиномъ въ 1558 году и пополненъ комментаріемъ, представляющимъ по большей части общее изложеніе перспективы; этотъ трудъ написанъ въ легкомъ геометрическомъ стилѣ, какъ и всѣ вообще многочисленныя сочиненія о перспективѣ 16-го и 17-го столѣтія.

13-е столѣтіе. Тринадцатый вѣкъ представляетъ новую эру въ исторіи наукъ. Въ этомъ вѣкѣ распространяется арабская система счисленія, алгебра и многія важныя сочиненія греческой школы и тѣмъ подготовляется время возрожденія. Эпоха эта богата писателями: мы встрѣчаемъ здѣсь знаменитыя имена, составляющія славу среднихъ вѣковъ: Іордана Неморарія, Леонарда Фибонакки изъ Пизы, Сакро Боско, Кампана изъ Наварры, Альберта Великаго, Винцента-де-Бове, Рожера Бакона, Вителліо.

Кампанъ перевелъ съ арабскаго 13 книгъ элементовъ Евклида и двѣ книги, приписываемыя Гипсиклу, и снабдилъ

---

[192]) Вмѣстѣ съ плоскошаріемъ Іордана и различными другими отрывками, относящимися къ астрономіи, подъ общимъ заглавіемъ: *Sphaerae atque astrorum coelestium ratio, natura et motus;* Valderus Basileae, 1536, in—4°.

Деламбръ въ *Histoire de l'astronomie ancienne* (T. 2, p. 456) показалъ для времени латинскаго перевода Рудольфа изъ Брюгге 1544 годъ, вмѣсто 1144. Эта ошибка объясняетъ, почему этотъ знаменитый астрономъ удивлялся, какимъ образомъ переводъ, сдѣланный въ 1544 году, оказался въ сочиненіи напечатанномъ въ 1536 году.

свой переводъ комментаріями [193]). Благодаря этому труду распространилось въ Европѣ знаніе геометріи; онъ напечатанъ былъ въ первый разъ въ 1482 году и пережилъ много изданій. Онъ пользовался большимъ уваженіемъ долгое время послѣ возрожденія наукъ и комментаріи Кампана служили постоянно пособіемъ для геометровъ, писавшихъ объ элементахъ, каковы Замберти, Лука Бурго, Пелетье, Клавій и пр. и также для алгебраистовъ, трактовавшихъ о несоизмѣримыхъ величинахъ, напр. для Стифельса въ его *Arithmetica integra*.

Говоря о томъ мѣстѣ изъ Боэція, въ которомъ по нашему мнѣнію рѣчь идетъ о звѣздчатомъ пятиугольникѣ, мы упомянули уже, что эта же фигура разсматривается въ комментаріи Кампана къ 32-му предложенію первой книги Евклида и что въ слѣдующемъ столѣтіи Брадвардинъ заимствовалъ отсюда свою идею о выдающихся многоугольникахъ, теорію которыхъ онъ развилъ довольно подробно.

Въ концѣ четвертой книги находимъ двѣ теоремы Кампана [194]), изъ которыхъ первая имѣетъ предметомъ дѣленіе угла на три части, вторая же—вписываніе въ кругъ правильнаго девятиугольника. Вторая задача приводится къ первой. Рѣшеніе, предлагаемое Кампаномъ, замѣчательно по

---

[193]) Нѣкоторые историки думаютъ, что этотъ трудъ Камнана есть ничто иное, какъ переводъ Аделарда, къ которому Кампанъ прибавилъ комментаріи. Вотъ что говоритъ по этому поводу Андресъ: *Sei* (*Campano*) *non tradusse come se dico comunemente; certo illustro con comenti l' Euclide*, *tradotto primo dall' Arabo in Latino dall' Inglese Atelardo Gotho*, *come ha fatto vedere il Tiraboschi* (*Dell'origine*, *de progressi*, *e dello stato attuale d'ogni litteratura*, Par. I, Cap. IX). Мнѣніе это подтверждается слѣдующимъ заглавіемъ рукописнаго экземпляра Кампанова изданія Евклида, хранящагося въ Парижской королевской библіотекѣ подъ № 7213: *Euclidis philosophi socratici incipit liber Elementorum artis geometricae translatus ab Arabico in Latinum per Adelardum Gothum Bathoniensem*, *sub commento Magistri Campani Novarrensis*. (Въ рукописяхъ 14-го столѣтія).

[194]) Въ изданіи 1537 года (Basel, in fol), заключающемъ въ себѣ всѣ дошедшія до насъ сочиненія Евклида, эти двѣ теоремы находятся въ концѣ тома.

своей простотѣ: на дѣлѣ оно приводится къ построенію конхоиды Никомеда. Вотъ на чемъ оно основано: изъ вершины угла, какъ изъ центра, опишемъ произвольнымъ радіусомъ кругъ, который пересѣчетъ стороны угла въ точкахъ *a* и *b*; построимъ радіусъ, перпендикулярный къ первой сторонѣ и черезъ точку *b* проведемъ прямую такъ, чтобы часть ея между перпендикуляромъ и окружностію была равна радіусу; наконецъ черезъ вершину угла проведемъ параллельную этой прямой; параллельная эта и будемъ опредѣлять третью часть угла.

Кампанъ не говоритъ, какъ опредѣляется положеніе прямой, которая проводится черезъ точку окружности и отрѣзокъ которой между діаметромъ и окружностію долженъ равняться радіусу. Можетъ быть онъ далъ рѣшеніе этой задачи гдѣ нибудь въ другомъ мѣстѣ; оно приводится очевидно, какъ мы сказали, къ построенію конхоиды Никомеда. Задача эта около конца 17-го столѣтія имѣла нѣкоторую знаменитость: она предложена была вмѣстѣ съ двумя другими задачами въ *Journal des Savans* (Августъ, 1676 г.) и рѣшена Вивіани въ его сочиненіи: *Enodatio problematum universis geometris propositorum a Cl. et R. D. Claudio Comiers, Canonico Ebredunensi, collegialis ecclesiae de Ternant Praepositio dignissimo. Praemissis, horum occasione, tentamentis variis ad solutionem illustris veterum problematis de anguli trisectione* (Florentiae, 1677, in—4°). Вивіани показываетъ при помощи очень простаго геометрическаго доказательства, что три точки, въ которыхъ конхоида пересѣкается съ кругомъ и которыя соотвѣтствуютъ рѣшенію задачи о трисекціи угла, лежатъ также на равносторонней гиперболѣ.

Извѣстно, что дѣленіе линіи въ крайнемъ и среднемъ отношеніи играетъ большую роль въ теоріи несоизмѣримыхъ количествъ, въ 10 и 13 книгѣ Евклида и въ теоріи правильныхъ тѣлъ. Многочисленныя свойства этого дѣленія не ускользнули отъ Кампана и онъ называетъ его удивительнымъ и основаннымъ на началѣ достойномъ вниманія фило-

софовъ [195]). Лука Бурго въ своемъ сочиненіи *Divina proportione* etc. называетъ именемъ *proportio divina* именно это дѣленіе и перечисляетъ его тринадцать *effetti*—приложеній. Теперь свойства эти мало извѣстны, потому что на дѣленіе прямой линіи въ крайнемъ и среднемъ отношеніи смотрятъ просто какъ на рѣшеніе квадратнаго уравненія, которое должно заключать въ себѣ всѣ эти свойства. Но это вѣрно только относительно свойствъ чисто аналитическихъ, между тѣмъ какъ самыя многочисленныя и любопытныя получаются именно изъ соображеній геометрическихъ. Это дѣленіе заслуживаетъ того, чтобы всѣ относящіяся къ нему теоремы были за ново возстановлены, какъ это уже сдѣлано нѣкоторыми геометрами относительно гармоническаго дѣленія прямой линіи [196]). Это было бы несомнѣнно собраніе весьма интересныхъ предложеній, которое повело бы къ новымъ открытіямъ о томъ же предметѣ и къ другимъ подобнымъ весьма общимъ соотношеніямъ [197]).

---

[195]) *Mirabilis itaque est potentia secundum proportionem habentem medium duoque extrema divisae. Cui cum plurima philosophantium admiratione digna conveniant, hoc principium vel praecipuum ex superiorum principiorum invariabili procedit natura, in tam diversa solida tum magnitudine tum basium numero, tum etiam figura, irrationali quadam symphonia rationabiliter conciliet.* (Lib. XIV, Prop. 10).

[196]) De Billy: *Tractatus de proportione harmonica*, Paris, 1658, in-4⁰. Saladini: *Della proporzione armonica*. Bologna, 1761, in 8⁰.

[197]) Дѣленіе линіи въ крайнемъ и среднемъ отношеніи приводится, напримѣръ, къ задачѣ: найти между двумя данными точками A и B такую третью C, чтобы выходило $AC^2 = AB.CB$; легко обобщить эту задачу, выводя ее изъ другой, въ которой для этого нужно предположить одну точку на безконечномъ разстояніи. Пусть J будетъ такая точка; искомая точка C должна опредѣляться относительно трехъ данныхъ точекъ A, B, J помощію уравненія:

$$CA^2.JB^2—CB.CJ.BA.BJ.$$

Если предположимъ J въ безконечности, то это уравненіе дѣйствительно приведется къ предыдущему.

Уравненіе это замѣчательно тѣмъ, что каждая изъ входящихъ въ него точекъ играетъ одну и туже роль по отношенію къ остальнымъ,

Въ одномъ примѣчаніи, слѣдующемъ за первымъ предложеніемъ 14 книги (первой изъ двухъ книгъ Гипсикла), Кампанъ говоритъ, что Аристеемъ и Аполлоніемъ доказана была слѣдующая теорема: *Поверхности вписанныхъ въ одинъ и тотъ же шаръ правильныхъ додекаэдра и икосаэдра относятся между собою какъ ихъ объемы*. Сочиненіе Аристея, говоритъ онъ, называлось *Expositio scientiae quinque corporum*; сочиненіе же Аполлонія имѣло предметомъ *сравненіе додекаэдра и икосаэдра*. Въ началѣ 10-го предложенія той же книги, которое есть именно вышеприведенная теорема, Кампанъ опять упоминаетъ имена Аристея и Аполлонія. Самыя сочиненія этихъ двухъ знаменитыхъ геометровъ древности до насъ не дошли; можетъ быть они неизвѣстны были и Кампану и онъ упомянулъ о нихъ только слѣдуя за Гипсикломъ, который почти въ тѣхъ же словахъ говоритъ о нихъ въ началѣ втораго предложенія. Кромѣ того Гипсиклъ въ своемъ предисловіи говоритъ подробно объ Аполлоніи и его сочиненіи *De dodecahedri et icosahedri in eadem sphaera descriptorum comparatione*. Кажется вообще обращалось вниманіе только на это мѣсто, потому что обыкновенно приводится только сочиненіе Аполлонія, а не Аристея, и я нашелъ, что одинъ Рамусъ причисляетъ послѣдняго къ числу писавшихъ о пяти правильныхъ тѣлахъ. Всѣ писавшіе по исторіи математики указываютъ согласно только на два сочиненія Аристея: на пять книгъ *Elementa conica* и на *Loca geometrica* — сочиненіе, которое, какъ извѣстно, пытался воспроизвести Вивіани.

Впрочемъ нѣтъ ничего удивительнаго, что Аристей писалъ о пяти правильныхъ тѣлахъ, такъ какъ эта теорія въ значительной степени занимала Грековъ и была у нихъ въ большомъ уваженіи съ самыхъ древнихъ временъ ихъ науки. Пиѳагоръ принялъ ихъ въ основу своего міровоззрѣнія, въ которомъ пять правильныхъ тѣлъ соотвѣтствовали четыремъ

и какая бы точка ни была удалена въ безконечность, уравненіе представляетъ всегда дѣленіе въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

элементамъ и вселенной [198]), почему ихъ и называли *міровыми фигурами* (*figurae mundanae*) [199]). Платонъ принялъ эту идею [200]), развивалъ ту же теорію [201]) и обыкновенно полагаютъ, что Теэтетъ, одинъ ихъ его учениковъ, писалъ первый объ этомъ предметѣ [202]). Потомъ мы встрѣчаемъ Аристея и далѣе: Евклида, Аполлонія и Гипсикла [203]). Послѣдній въ своихъ двухъ книгахъ упоминаетъ о своемъ учителѣ, Исидорѣ Великомъ, отъ котораго онъ научился тому, что зналъ объ этомъ. Благодаря идеямъ пиѳагорейцевъ и

---

[198]) Кубъ представлялъ землю, тетраэдръ—огонь, октаэдръ—воздухъ, икосаэдръ—воду, а додекаэдръ—вселенную. (Plutarch, *Placit. philos.* Lib. XI, Cap. 6).

[199]) Proclus: *Commentarius in Euclidem*, Lib. XI, Cap. 4.—Kepler: *Harmonices mundi*, Lib. II, p. 58.

[200]) Timaeus, Par. III.—Plutarch: *Platonicae questiones.*

[201]) Pappus: *Collectiones mathematicae*, Lib. V, послѣ Prop. XVII.—Proclus: *in Euclidem*, Lib. XI, Cap. 4.

[202]) *Theaetetus, Atheniensis, Archytae sodalis, Geometrica auxit, primusque de quinque solidis tractavit, ut Laertius et Proclus produnt.* (Heilbronner *Historia matheseos*, p. 149).

[203]) Относительно времени, когда жилъ Гипсиклъ, мнѣнія различны. Одни полагаютъ, что во второмъ вѣкѣ нашего лѣтосчисленія, другіе—во второмъ вѣкѣ до Р. Х. вскорѣ послѣ Аполлонія. Говоря объ Евклидѣ, мы приняли второе мнѣніе: тамъ мы сказали, что Гипсиклъ жилъ около 150 лѣтъ послѣ Евклида.

Таково же было мнѣніе Бернардина Бальди въ *Cronica di matematici*, p. 37, и Воссія, который полагаетъ, что Гипсиклъ жилъ при Птоломеѣ Латирусѣ, а учитель его Исидоръ Великій, о которомъ онъ упоминаетъ въ двухъ своихъ книгахъ,—при Птоломеѣ Фисконѣ. По мнѣнію Воссія это тотъ самый Исидоръ, о которомъ упоминаетъ Плиній въ своей геометріи. (Vossius, *de scientiis mathematicis*, p. 328).

Ученый Ментель въ предисловіи къ латинскому переводу небольшаго сочиненія Гипсикла по астрономіи подъ заглавіемъ: *Anaphoricus, sive de Ascensionibus* Paris. 1657, in—4°, и въ недавнее время Деламбръ (*Histoire de l'astronomie ancienne*, t. I, p. 246) и Франчини (*Saggio della storia delle matematiche*, p. 146) помѣщаютъ Гипсикла около 146 года до Р. Х. но Фабрицій (*Bibtiotheca graeca*, t. II, p. 91) и за нимъ Вейдлеръ, Геильброннеръ, Монтукла и Лаландъ признаютъ, что онъ родился во второмъ вѣкѣ послѣ Р. Х.

платониковъ, пять правильныхъ тѣлъ играли въ древности такую важную роль, что ихъ расматривали даже какъ конечную цѣль, къ которой стремятся научные труды геометровъ [204]).

Паппъ указываетъ [205]), что Архимедъ пытался расширить эту теорію и что, не найдя возможности составить болѣе пяти правильныхъ многогранниковъ, онъ изобрѣлъ многогранники другаго рода, которые назвалъ *полуправильными* (*semiregularia*): ихъ грани такія же, какъ и въ правильныхъ, но не всѣ равны между собою. Такихъ новыхъ тѣлъ было тринадцать. Паппъ даетъ очень ясное описаніе ихъ, которое потомъ воспроизведено было Кеплеромъ въ *Harmonices mundi*, причемъ Кеплеръ приложилъ и изображенія ихъ. Историки умалчиваютъ объ этой работѣ Архимеда и, правда, она по самому свойству своему гораздо ниже другихъ открытій этаго великаго человѣка. Генія Архимеда было бы болѣе достойно, еслибы онъ, желая въ теоріи правильныхъ тѣлъ идти далѣе Евклида и другихъ геометровъ, нашелъ новые *звѣздчатые* многогранники, описанные Пуансо, которые дѣйствительно представляютъ расширеніе, къ какому только способна эта древняя знаменитая теорія.

Возвращаемся къ Кампану. Лука Гаурикъ, (Lucas Gauricus) неаполитанскій астрономъ и астрологъ, издалъ въ началѣ 16-го столѣтія съ именемъ Кампана сочиненіе *De tetragonismo, seu Quadratura circuli* [206]) и многіе позднѣйшіе писатели повторяли, что Кампанъ писалъ о квадратурѣ круга. Но сочиненіе, о которомъ идетъ рѣчь обнаруживаетъ только невѣжество своего автора и недостойно носить на себѣ имя

---

[204]) *Nihil in antiqua Geometria speciosius visum est quinque corporibus ordinatis, eorumque gratia Geometriam, ut ex Proclo, initio, dictum est, inventam esse veteres illi crediderunt.* (Ramus: *Scholarum mathematicarum*, Lib. XXX).

[205]) *Collectiones mathematicae*, Lib. V, послѣ 17-го предложенія.

[206]) *Tetragonismus, id est circuli quadratura per Campanum, Archimedem Syracusanum atque Boëtium, mathematicos perspicacissimos adinventa.* Venetiis, 1503, in—4.

знаменитаго переводчика Евклида. За основаніе своей квадратуры сочинитель беретъ отношеніе окружности къ діаметру, равное $\frac{22}{7}$ „*secundum quod plerique mathematici scripserunt et juxta physicam veritatem*“; затѣмъ, перейдя черезъ нѣсколько промежуточныхъ пропорцій, онъ заключаетъ, что сторона квадрата, равнаго по площади кругу, равна $5\frac{1}{2}$ разъ взятой седьмой части діаметра. Такъ что, если D будетъ діаметръ, то площадь круга выйдетъ $\frac{D^2}{4}\cdot\left(\frac{11}{7}\right)^2$ вмѣсто $\frac{D^2}{4}\cdot\frac{22}{7}$.

Сакро Боско своею долгою извѣстностію обязанъ сочиненію *De sphaera mundi*, которое есть извлеченіе изъ Альмагеста Птоломея и которое впродолженіе 400 лѣтъ служило для преподаванія астрономіи въ школахъ. Напечатанное въ первый разъ въ Феррарѣ въ 1472 году, оно выдержало послѣ того по крайней мѣрѣ пятьдесятъ изданій. Многіе извѣстные писатели, каковы Пурбахъ, Регіомонтанъ, Вине, Клавій и др. поясняли его своими примѣчаніями и комментаріями.

Но, чтобы составить себѣ правильное понятіе о тогдашнемъ состояніи науки, необходимо замѣтить, что въ этомъ сочиненіи находятся только самыя элементарныя понятія, почерпнутыя у Птоломея; въ немъ указываются круги на сферѣ, явленія суточнаго движенія и говорится нѣсколько словъ о затмѣніяхъ. Только черезъ два столѣтія послѣ этого знаніе Альмагеста сдѣлало шагъ впередъ, когда Пурбахъ объяснилъ теорію планетъ—самую важную и трудную часть во всемъ этомъ сочиненіи.

Сакро Боско оставилъ также одно, написанное въ стихахъ, сочиненіе по ариѳметикѣ, подъ названіемъ *De Algorismo* [207]). Это совершенно наша современная ариѳметика:

---

[207]) Есть еще другое сочиненіе по ариѳметикѣ того же времени написанное также въ латинскихъ стихахъ, авторъ котораго Alexandre de

Сакро Боско приписываетъ ее Индѣйцамъ. Онъ дѣлитъ ее на 9 частей, именно: нумерація, сложеніе, вычитаніе, дѣленіе пополамъ [208]), удвоеніе [209]), умноженіе, дѣленіе, прогрессіи и извлеченіе квадратныхъ и кубичныхъ корней. Долгое время потомъ сочиненія по ариѳметикѣ состояли изъ этихъ девяти главъ; это еще встрѣчается даже въ сочиненіяхъ 16 столѣтія.

Прибавленіе. Подъ именемъ Сакро Боско было напечатано сочиненіе объ *Algorismus* подъ заглавіемъ: *Algorismus domini Johannis de Sacro Bosco, noviter impressum,* Venetiis, 1523, in—4°. Но это сочиненіе не Сакро Боско, котораго ариѳметика написана въ стихахъ; это то самое, которое Кликтовей напечаталъ подъ заглавіемъ: *Opusculum de praxi numerorum quod Algorismum vocant.*

Сочиненіе это очень мало отличается отъ другихъ, но тѣмъ не менѣе оно заслуживаетъ вниманія. Издатель предлагаетъ ставить *точку* надъ цифрою *тысячъ,* чтобы отличить ее отъ другихъ; потомъ такимъ же образомъ *точку* надъ четвертою цифрою послѣ тысячъ и такъ далѣе черезъ четыре цифры. Очевидно это ничто иное какъ тетрады Аполлонія, которыя въ современномъ счисленіи замѣнены дѣленіемъ на группы по три цифры, такъ какъ у насъ числа выговариваются при помощи названій этихъ отдѣловъ: единицы, тысячи, милліоны, билліоны и т. д. *Точку* для отдѣленія группъ замѣнили чертой или запятой.

Тетрады, отмѣченныя точками, мы находимъ еще въ сочиненіи по ариѳметикѣ Пурбаха; *Algorithmus G. Peurbachii in integris,* Viennae, 1515, in—4.

Іордану Неморарію мы обязаны слѣдующимъ трудами:

1) Сочиненіемъ по ариѳметикѣ въ двухъ книгахъ, заключающимъ въ себѣ изложеніе свойствъ чиселъ, заимствованное

Villedieu. (Vossius: *De scientiis mathematicis,* p 40—Dounou: *Histoire littéraire de la France* t. XVI, p. 113).

[208]) Mediatio.

[209]) Duplatio. Это дѣйствіе и дѣленіе на два стали подводить подъ общія правила умноженія и дѣленія въ сочиненіяхъ 16-го столѣтія, которыя поэтому содержали только семь главъ, вмѣсто девяти. (См. *Summa de Arithmetica* etc. Луки Бурго).

у Никомаха и Боэція. Сочиненіе это было напечатано въ 1496 году съ комментаріемъ Фабера (Faber Stapulensis); послѣ того оно являлось во многихъ изданіяхъ.

2) Изложеніемъ практической ариѳметики въ арабскомъ стилѣ подъ названіемъ *Algorismus*: оно осталось въ рукописи.

3) Сочиненіемъ о плоскошаріи, которое напечатано было вмѣстѣ съ плоскошаріемъ Птоломея въ 1507, 1536 и 1558 годахъ. Въ этомъ сочиненіи мы въ первый разъ находимъ совершенно общее доказательство прекраснаго свойства стереографической проэкціи, служащаго основаніемъ при построеніи плоскошарій, именно, что *кругъ проэктируется также кругомъ*. Птоломей доказалъ эту теорему только для сѣченій шара въ нѣкоторыхъ особыхъ положеніяхъ, потому что онъ, *стремясь во всемъ къ ясности и простотѣ*, какъ говоритъ Проклъ въ X книгѣ Hypotyposis, вводилъ въ свое сочиненіе и доказывалъ только такія геометрическія истины, которыя были для него необходимы.

Птоломей составляетъ проэкцію изъ глаза помѣщеннаго въ полюсѣ на плоскость экватора, Іорданъ же на касательную плоскость, проведенную черезъ противуположный полюсъ шара. Позднѣе Мавроликъ и другіе геометры поступали такъ же. Мы обращаемъ вниманіе на эти незначительныя различія въ сочиненіяхъ Іордана и Птоломея, такъ какъ они представлялись для того времени существеннымъ нововведеніемъ и были первыми проявленіями духа пытливости и изобрѣтательности, столь рѣдко замѣчаемаго въ 13-мъ столѣтіи, когда умы еще были заняты усвоеніемъ знаній сообщенныхъ Арабами.

Проэкція, которую Птоломей употреблялъ въ своемъ плоскошаріи, получила названіе *стереографической* уже въ новое время: названіе это ведетъ начало отъ Aguilon'а, который предложилъ его и употреблялъ въ своей оптикѣ [210]).

---

[210]) *Aguilonii Opticorum libri sex* Paris, 1613, in fol.

„*Quare tametsi stereographices nomine nusquam vocatum hoc projectionis genus reperimus; quia tamen nec alio quidem ullo solitum est*

Стереографическая проэкція обладаетъ однимъ замѣчательнымъ свойствомъ, именно: *уголъ двухъ круговъ на шарѣ равенъ углу круговъ въ проэкціи.* Эта прекрасная теорема не была замѣчена ни Птоломеемъ, ни Іорданомъ [271]). Самая старая книга, въ которой она встрѣчается, насколько это извѣстно Деламбру, есть сочиненіе по Навигаціи Робертсона (1754). (См. *Traite d'astronomie*, t. III).

Существуетъ еще рукопись Іордана: *De triangulis* [212]).

Онъ написалъ также три книги *De geometria*, которыя Воссій предполагалъ хранящимися въ библіотекѣ Ватикана [213]) и которыя находились также въ Лейпцигской библіотекѣ [214]).

Рамусъ приписываетъ ему изящную формулу площади треугольника въ функціи трехъ сторонъ [215]). Мы не знаемъ, въ какомъ изъ своихъ сочиненій предложилъ ее Іорданъ; Вентури не нашелъ ее въ сочиненіи *De triangulis* [216]). Доказательство одинаково съ тѣмъ, которое въ томъ же столѣтіи дано было Леонардомъ изъ Пизы въ его практической геометріи. Оно кажется арабскаго происхожденія, такъ какъ встрѣчается въ сочиненіи трехъ геометровъ—сыновей Муза-бенъ-Шакера и въ сочиненіи еврея Савосарды.

---

appellari, placuit hoc nomen usurpare, quod nobis in praesenti visum est ad rem ipsam quam maxime accomodatum". (Praetatio).

[211]) Въ пятой эпохѣ мы уже говорили, что стереографическая проэкція обладаетъ еще другимъ весьма интереснымъ свойствомъ, относящимся къ опредѣленію центра круга въ проэкціи, и что начала этой проэкціи, распространенныя на поверхности втораго порядка, составляютъ въ настоящее время одинъ изъ способовъ изысканія въ раціональной геометріи.

[212]) Сочиненіе это находится въ библіотекѣ доминиканцевъ во Флоренціи (Montfaucon; *Bibl. bibl.*), въ городѣ Базелѣ (Haenel, *catalogi*, etc.) и въ Парижской королевской библіотекѣ (№ 7378, A).

[213]) *De scientiis mathematicis*, p. 333.

[214]) C. Gesner: *Bibliotheca universalis*, etc. t. II, fol. 77.

[215]) *Scholae mathematicae*, послѣ XXXI книги.

[216]) *Commentari sopra la storia e le teorie dell'ottica.* Commentario II; del Traguardo, cap. XXX.

Іорданъ писалъ также объ оптикѣ и механикѣ [217]).

Альбертъ Великій, названный, какъ говоритъ Монтукла, или по своему наружному виду, или потому, что имя его *Grott* на языкѣ того времени означало *gross*—большой, писалъ объ ариѳметикѣ, геометріи, астрономіи и музыкѣ. Сочиненія его не дошли до насъ. Этотъ чрезвычайно плодовитый писатель былъ извѣстенъ своимъ искусствомъ въ механикѣ и обладалъ обширнымъ знаніемъ арабскихъ сочиненій.

Рожеръ Баконъ, одинъ изъ геніальнѣйшихъ людей въ средніе вѣка, занимаетъ первое мѣсто въ ряду лицъ, споспѣшествовавшихъ всеобщему возрожденію наукъ. Онъ содѣйствовалъ въ особенности успѣхамъ математики, указывая во многихъ своихъ сочиненіяхъ [218]) важное мѣсто, которое она занимаетъ въ ряду другихъ человѣческихъ знаній, и пособіе, которое она можетъ оказать во всѣхъ, основанныхъ на ней, научныхъ изслѣдованіяхъ. Оптика его, какъ всѣмъ извѣстно, заключаетъ въ себѣ научныя замѣчанія, существенныя открытія въ теоріи и изобрѣтеніе многихъ весьма полезныхъ инструментовъ.

Его астрономическія свѣдѣнія дали ему возможность замѣтить ошибочность календаря и предпринять его преобразованіе. Вычисленный имъ, но оставшійся въ рукописи, календарь отличается правильностію и замѣчателенъ употребленіемъ арабскихъ цифръ, тѣхъ же самыхъ какъ у Сакро Боско.

Вителліо издалъ ученый трудъ по оптикѣ, представляющій подраженіе арабу Альгазену и замѣчательный, особенно для той эпохи, когда онъ появился, по тѣмъ геометрическимъ началамъ греческой школы, которыя приняты въ немъ за основаніе.

Вся первая книга посвящена геометріи. Авторъ соединяетъ здѣсь всѣ предложенія, которыя должны имѣть час-

---

[217]) *Jordani de ponderibus propositiones XIII et demonstrationes.* Norimbergae, 1531, in—4.

[218]) *Specula mathematica.—Opus majus*, 4-я, 5-я и 6-я часть.

тое примѣненіе въ дальнѣйшемъ приложеніи и которыхъ нѣтъ въ элементахъ Евклида. Нѣкоторыя заимствованы изъ коническихъ сѣченій Аполлонія и Вителліо это указываетъ; другія, относящіяся къ гармоническому дѣленію прямой линіи, сходны съ предложеніями, встрѣчающимися въ седьмой книгѣ Математическаго Собранія Паппа; нѣкоторыя, наконецъ, въ томъ же родѣ, какъ въ книгѣ *De inclinationibus* Аполлонія. Но ни на это сочиненіе, ни на сочиненіе Паппа, ссылокъ или указаній нѣтъ.

Ссылаясь на элементы Евклида и на коническія сѣченія Аполлонія, Вителліо, безъ сомнѣнія знакомый съ этими сочиненіями, убѣждаетъ насъ во первыхъ въ томъ, что въ его время былъ уже въ ходу другой переводъ Евклида, кромѣ слишкомъ еще тогда новаго перевода Кампана, и съ другой стороны въ томъ, что знаменитое сочиненіе *Conica* Аполлонія было уже извѣстно. Предполагалось, что съ послѣднимъ сочиненіемъ начали знакомиться въ Европѣ только черезъ 200 лѣтъ, около средины 15-го вѣка, когда Регіомонтанъ приступилъ къ своимъ изданіямъ [219]).

Другой писатель—Рессаm, архіепископъ Кентербюрійскій, современникъ Витилліо, оставилъ также сочиненіе по оптикѣ, но оно не отличается такою ученосью, какъ сочиненіе польскаго геометра.

Винцентъ-де-Бове не есть оригинальный писатель, но нельзя не упомянуть объ его *speculum mundi*, — этомъ огромномъ сочиненіи, получившемъ названіе *энциклопедіи 13-го вѣка*, — такъ какъ оно даетъ понятіе о состояніи, въ которомъ находились въ ту эпоху науки, хотя въ немъ и не помѣщены всѣ научныя пріобрѣтенія, добытыя впродолженіе самаго 13-го столѣтія. Въ сочиненіи этомъ мы находимъ извлеченія изъ Евклида, Аристотеля, Витрувія,—который до тѣхъ поръ кажется не былъ извѣстенъ средневѣковымъ ученымъ,—изъ Боэція, Кассіодора, Исидора Севиль-

---

[219]) Montucla *Histoire des mathématiques*, t. I, p. 248.

скаго, Альфарабія, Авиценна и различныхъ другихъ арабскихъ писателей.

Винцентъ-де-Бове говоритъ, что Альфарабій [220]) различалъ восемь математическихъ наукъ: ариѳметику, геометрію, перспектику, астрономію, музыку, метрику или науку о вѣсахъ и мѣрахъ, и науку о духѣ (т. е. метафизику). Здѣсь приведено только семь наукъ; восьмая, пропущенная, есть алгебра, которая у Альфарабія помѣщена послѣ ариѳметики. Винцентъ-де-Бове не говоритъ о ней; это ведетъ къ предположенію, что алгебра тогда не проникла еще во Францію, или по крайней мѣрѣ была извѣстна только небольшому кружку математиковъ.

Наша сисмема счисленія, съ нулемъ, изложена весьма ясно подъ оглавленіемъ: *Algorismus.* Геометрія сводится на опредѣленія и на нѣкоторыя элементарныя понятія: это доказываетъ, что предметы, составлявшіе содержаніе ученыхъ трудовъ Сакро Боско, Кампана, Іордана, Вителліо, были еще совершенно новы и знаніе ихъ не достигло еще до Винцента-де-Бове.

Если бы въ этомъ обзорѣ писателей 13-го вѣка мы слѣдовали хронологическому порядку, то начали бы безъ сомнѣнія съ Фибонакки, называемаго обыкновенно Леонардомъ изъ Пизы, такъ какъ его *Liber Abbaci* помѣчена 1202 годомъ. Но сочиненіе это имѣло такое вліяніе на направленіе математическихъ наукъ въ 15-мъ столѣтіи, что мы съ намѣреніемъ отдѣлили его отъ сочиненій, о которыхъ говорили до сихъ поръ. Эти послѣднія относятся къ греческой школѣ, не смотря на то, что, она проникла въ Европу чрезъ посредство арабовъ и на ихъ языкѣ. Сочиненія же Леонарда имѣютъ повидимому происхожденіе индѣйское, хотя также прошедшее черезъ руки арабовъ. Отсюда проистекаетъ особый характеръ, отличающій ихъ отъ всѣхъ другихъ сочиненій.

---

[220]) Альфарабій былъ знаменитѣйшій изъ арабовъ 10-го столѣтія, особенно какъ геометръ и астрономъ. Въ спискѣ его многочисленныхъ сочиненій мы находимъ одно, заглавіе котораго *Nilus felicitatum, seu disciplinarum mathematicarum thesaurus* показываетъ то важное значеніе, которое приписывалось математическому образованію.

Леонардъ Фибонакки путешествовалъ, какъ извѣстно, на востокѣ; по возвращеніи онъ издалъ сочиненіе объ ариѳметикѣ и алгебрѣ, начинавшееся словами: *Incipit Liber Abbaci compositus a Leonardo filio Bonacci Pisano in anno 1202.* Ариѳметика есть наша современная система съ нулемъ; Фибонакки приписываетъ ее Индѣйцамъ:

«*Novem figurae Indorum hae sunt*

VIIII, VIII, VII, VI, V, IIII, III, II, I

9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. [221])

cum his itaque novem figuris et cum hoc signo 0 *quod arabice zephirum appellatur, scribitur quilibet numerus,* etc.» [222])

Сочиненіе по алгебрѣ, которое Фибонакки, подобно Арабамъ называетъ *Algebra et Almucabala*, доходитъ до рѣшенія уравненій второй степени и нѣкоторыхъ другихъ къ нимъ

---

[221]). Цифры сходны съ цифрами Сакро Боско, которыя приведены въ сочиненіяхъ многихъ другихъ авторовъ (см. преимущественно у Геильброннера и Монтуклы). Впрочемъ арабскія цифры, встрѣчающіяся въ большемъ числѣ рукописей 13-го и 14-го столѣтія, имѣютъ всѣ одну и туже форму.

[222]). Замѣтимъ, что почти всѣ писатели 13-го столѣтія:—Фибонакки, Іорданъ, Сакро Боско, Винцентъ-де-Бове, Александръ Вильдье, Рожеръ Баконъ,—писали объ арабской, или лучше сказать индѣйской, системѣ счисленія. Это доказываетъ очевидно, что эта система уже съ давнихъ поръ была извѣстна и употребляема у математиковъ, и что для точнаго опредѣленія времени введенія ея въ Европу, честь котораго не можетъ быть приписываема ни Фибонакки, ни кому другому изъ названныхъ писателей, нужно обратиться къ эпохѣ ранѣе 13-го столѣтія. И въ самомъ дѣлѣ нельзя допустить, чтобы писатели предшествовавшаго столѣтія, доставившіе многочисленные переводы важнѣйшихъ арабскихъ сочиненій, могли не знать арабской системы, какъ самой по себѣ, такъ и вслѣдствіе крайней необходимости подобнаго знанія для перевода астрономическихъ таблицъ и другихъ сочиненій, напр. Арзахеля, Альфрагана и др.

И мы дѣйствительно указали уже на два сочиненія объ *Algorismus*, изъ которыхъ одно написано повидимому Герардомъ Кремонскимъ, а другое—Іоанномъ Севильскимъ (Hispalensis). Оба эти писателя жили въ 12-мъ вѣкѣ.

приводящихся. Это—подражаніе элементарной и весьма распространенной между Арабами въ 9-мъ столѣтіи алгебрѣ Могаммеда-бенъ-Муза. Фибонакки дѣлаетъ приложенія этой науки къ геометріи: это было начало и первый примѣръ введенія алгебры въ геометрическія доказательства и изслѣдованія у европейскихъ математиковъ. Сліяніе этихъ двухъ наукъ, столь рѣзко различавшихся у Грековъ, составляетъ отличительный характеръ сочиненія Фибонакки, гдѣ оно не только примѣнено къ дѣлу, но ясно признано, какъ свойственное природѣ этихъ наукъ и способное вести къ ихъ взаимной поддержкѣ. Фибонакки въ предисловіи говоритъ: *Et quia arithmetica et geometriae scientia sunt connexae, et suffragatoriae sibi ad invicem, non potest de numero plena tradi doctrina, nisi inserantur geometrica quaedam, vel ad Geometriam spectantia*; и прибавляетъ, что правила и пріемы алгебры получаютъ часто очевидность и доказываются помощію геометрическихъ соображеній и чертежей. Затѣмъ авторъ обѣщаетъ говорить подробнѣе о томъ, что касается геометріи, въ книгѣ своей о практической геометріи, которая дѣйствительно была имъ издана.

Это сочиненіе, состоящее изъ восьми главъ, называется: *Leonardi Pisani de filiis Bonnacci Practica Geometriae, composita anno MCCXX.* Оно осталось въ рукописи, также какъ и сочиненіе по алгебрѣ. Бернардинъ Бальди извѣщаетъ, что Коммандинъ приготовилъ сочиненіе о геометріи къ печати, но умеръ, не исполнивъ своего намѣренія[223]. Эдуардъ Бернардъ, ученый англійскій геометръ и астрономъ 17-го столѣтія хотѣлъ помѣстить сочиненіе Фибонакки по алгебрѣ въ седьмомъ томѣ великолѣпнаго собранія древнихъ сочиненій по математикѣ, которое онъ заготовлялъ[224].

---

[223]) *Cronica de'matematici* p. 89.

[224]) Собраніе это должно было состоять изъ 14 томовъ; списокъ сочиненій, которыя должны были въ немъ заключаться, находится въ *Bibliotheca graeca* Фабриція (Lib. III, cap. 23).

Въ назначавшемся для алгебры 6-мъ томѣ мы находимъ слѣдующее заглавіе одного изъ сочиненій Тебита-бенъ-Кораха, указывающее на

Фибонакки оставилъ еще статью о *квадратныхъ числахъ*, которая, насколько можно судить по тѣмъ мѣстамъ *Summa de arithmetica* Луки Бурго и ариѳметики Кардана, гдѣ она цитуется, относилась къ неопредѣленному анализу первой и второй степени. Формулы, употребляемыя этими двумя геометрами, отличаются отъ формулъ Діофанта и одинаковы съ формулами индѣйскихъ сочиненій съ тѣмъ постояннымъ различіемъ, что рѣшаемые вопросы не такъ трудны и общи, какъ у Индѣйцевъ. Статью Фибонакки мы должны разсматривать какъ копію съ какого-нибудь арабскаго сочиненія, заимствованнаго въ свою очередь отъ Индѣйцевъ.

Такимъ образомъ сочиненія Фибонакки, сдѣлавшіяся въ 16-мъ столѣтіи образцомъ и основаніемъ для Луки Бурго, Кардана и Тарталеа, имѣли чисто арабское, или въ сущности индѣйское, происхожденіе. Ошибочно поэтому мнѣніе, что мы нашими знаніями и успѣхами въ наукахъ обязаны непосредственно и исключительно Грекамъ.

Сочиненія Фибонакки еще не изданы, хотя въ настоящее время признана вся ихъ важность; рукописные списки ихъ рѣдки, статья же о квадратныхъ числахъ затерялась лѣтъ 60 тому назадъ. Подобная же участь достанется и сочиненіямъ по алгебрѣ и геометріи, если печать не озаботится скоро о сохраненіи этихъ важныхъ для исторіи европейской науки памятниковъ [225]).

ту тѣсную связь, какую допускали арабы между алгеброй и геометріей и на отличительный характеръ ихъ математики: *Thebiti tractatus de veritate propositionum algebricarum demonstrationibus Geometricis adstruenda, cum aliis tractatibus egregiis*, *quae Gebricam artem spectant.* Arabice et latine.

Громадные и цѣнные матеріалы, заготовленные Бернардомъ, поступили послѣ его смерти въ *Bibl Bodleiana.* Нельзя не удивляться, что такое прекрасное и полезное предпріятіе не выполнено было именно въ той странѣ, гдѣ науки находили себѣ такъ часто благородную и могущественную поддержку.

[225]) „Лица, не занимающіяся спеціально историческими изысканіями, не могутъ и представить себѣ, сколько драгоцѣнныхъ рукописей пропадаетъ даже теперь, въ самое послѣднее время.... Послѣ такой не-

14-е столѣтіе. Четырнадцатое столѣтіе является въ исторіи среднихъ вѣковъ съ меньшимъ блескомъ, нежели 13-е; причина этого въ томъ, что новыя и важныя произведенія, прославившія имена Фибоначчи, Сакро Боско, Кампана, Іордана, Вителліо, Рожера Бакона, должны были обдумываться и изучаться въ тишинѣ, чтобы быть вполнѣ усвоенными и принести плоды. Намъ кажется во всякомъ случаѣ, что 14-е столѣтіе, такъ мало еще извѣстное, выполнило свое назначеніе. Математическія ученія расширились и не сводились уже на простое воспроизведеніе или подражаніе немногимъ арабскимъ сочиненіямъ; дѣлались первыя попытки примѣнить пріобрѣтенныя знанія и идти далѣе ихъ; умы подготовлялись къ чтенію греческихъ текстовъ и къ быстрому и общему движенію, которое повело за собою въ слѣдующемъ столѣтіи обновленіе наукъ.

простительной небрежности имѣемъ ли мы право обвинять средніе вѣка въ уничтоженіи рукописей. Изъ боязни прослыть варварами въ глазахъ потомковъ намъ пора бы уже принять мѣры противъ подобнаго истребленія". (*Histoire des sciences mathematiques en Italie*, t. I, p. X).

Мы считаемъ долгомъ повторить эти слова Либри и желаемъ, чтобы они нашли себѣ повсемѣстный отголосокъ.—Но понятно, что указываемая въ нихъ обязанность должна лежать не только на частныхъ лицахъ, но еще болѣе на правительствахъ, желающихъ содѣйствовать успѣхамъ наукъ и развитію человѣчества. Печатныя изданія рукописей, представляющихъ научный и историческій интересъ, и переводы нѣкоторыхъ иностранныхъ сочиненій на отечественные языки, составляли бы также важныя, полезныя и притомъ не дорого стоящія пособія людямъ, посвятившимъ себя ученымъ трудамъ.

Другая мѣра, которую можно бы было предпринять, чтобы предупредить исчезновеніе литературныхъ рѣдкостей (напр. произведеній 17-го столѣтія, уничтожающихся съ каждымъ днемъ)—это учрежденіе спеціально-научной, такъ сказать исторической, библіотеки, гдѣ бы впродолженіе цѣлыхъ вѣковъ собирались произведенія знанія и таланта,—которая была бы хранилищемъ, куда каждый считалъ бы долгомъ и честію представить свои собственныя незначительныя работы, которыя теперь пропадаютъ, такъ какъ неизвѣстно, куда ихъ нужно отправить, чтобы онѣ принесли свою долю пользы и чтобы существованіе ихъ было обезпечено.

Первая треть 14-го столѣтія представляетъ намъ человѣка, который пріобрѣлъ себѣ значительную извѣстность своими познаніями въ философіи, математикѣ, теологіи и въ арабской литературѣ, именно Томаса Брадвардина, епископа Кентерберійскаго. Мы уже упоминали о его теоріи выдающихся многоугольниковъ, которую онъ развилъ, основываясь на краткомъ указаніи Кампана о звѣздчатомъ пятиугольникѣ. Эта теорія представляетъ дѣйствительно новое воззрѣніе, дѣлающее честь 14-му вѣку. Она находится, какъ мы уже говорили, въ сочиненіи подъ заглавіемъ: *Geometria speculativa*, которое было напечатано въ 1496 году и имѣло потомъ еще много изданій [226]). Это указаніе года (1496) ввело, кажется, въ ошибку историковъ Бернардина Бальди, Геильброннера и Монтуклу, которые относятъ это сочиненіе къ концу 15-го столѣтія; это же можетъ быть было причиною, что сочиненіе это до сихъ поръ мало цѣнится, такъ какъ считать сочиненіе слишкомъ на полтора вѣка позднѣйшимъ, значитъ въ большой степени уменьшать его важность. Для того времени, когда сочиненіе это написано, оно весьма замѣчательно и не только благодаря теоріи выдающихся многоугольниковъ, но и по многому другому, между прочимъ потому, что въ немъ мы находимъ нѣкоторыя предложенія объ изопериметрическихъ фигурахъ.

Предлагаемъ разборъ этого сочиненія.

Вотъ другое заглавіе его: *Breve Compendium artis Geometriae a Thoma Bradvardini ex libris Euclidis, Boëtii et Campani peroptime compilatum*. Издатель долженъ бы былъ назвать также Архимеда и Θеодосія, о которыхъ онъ часто

---

[226]) Между рукописями королевской библіотеки (№ 7368, копія 14-го вѣка) есть одна, названная въ каталогѣ *Fragmentum elementorum Geometriae*, въ которой мы нашли мѣста изъ геометріи Брадвардина. Тамъ же находятся и теорія выдающихся многоугольниковъ, но между фигурами находится только пятиугольникъ втораго рода и семиугольникъ третьяго рода, названные пятиугольникомъ *перваго порядка* и семиугольникомъ *втораго порядка*. Другіе выдающіеся многоугольники не изображены.

упоминаетъ и у которыхъ многое заимствуетъ, именно изъ книги *De quadratura circuli* перваго и изъ *Sphaerica* втораго.

Сочиненіе распадается на четыре части.

Въ первой содержатся опредѣленія, аксіомы, постулаты, находящіеся въ началѣ элементовъ Евклида, и теорія выдающихся многоугольниковъ.

Во второй части изслѣдуются треугольникъ, четыреугольникъ, кругъ и изопериметрическія фигуры, о которыхъ, какъ замѣчаетъ Брадвардинъ, въ геометріи Евклида ничего не сказано. Но извѣстно, что теорія эта получила начало въ школѣ Пиѳагора и что ученикъ этого философа Зенодоръ оставилъ сочиненіе объ этомъ предметѣ, имѣвшее цѣлію опровергнуть обыкновенное въ то время мнѣніе, что фигуры съ одинаковымъ периметромъ имѣютъ одинаковую площадь; сочиненіе Зенодора, древнѣйшее изъ дошедшихъ до насъ греческихъ сочиненій по геометріи, сохранено Теономъ въ его комментаріѣ къ Альмагесту [227]). Паппъ также занимается этимъ предметомъ въ пятой книгѣ Математическаго Собранія. Брадвардинъ не говоритъ, заимствовалъ ли онъ доказываемыя имъ предложенія изъ этого сочиненія, или изъ Альмагеста, или же нашелъ ихъ самъ. Вотъ эти предложенія.

Первое предложеніе. — *Изъ всѣхъ изопериметрическихъ многоугольниковъ наибольшую площадь имѣетъ тотъ, у котораго число угловъ есть наибольшее.*

Второе предложеніе.—*Изъ всѣхъ изопериметрическихъ многоугольниковъ, имѣющихъ одинаковое число угловъ наибольшій тотъ, въ которомъ углы равны между собою.*

Третье предложеніе. — *Изъ всѣхъ изоперменетрическихъ многоугольниковъ, имѣющихъ одинаковое число сторонъ и равные между собою углы, наибольшій тотъ, въ которомъ стороны равны.*

Четвертое предложеніе.—*Изъ всѣхъ изопериметрическихъ многоугольниковъ кругъ есть наибольшій.* Авторъ прибавляетъ, что *шаръ имѣетъ такое же свойство между тѣлами.*

---

227) Клавій воспроизвелъ его въ своемъ комментаріѣ на сочиненіе Сакро Боско о шарѣ.

Въ третьей части сочиненія говорится о пропорціяхъ и о измѣреніи площадей треугольника, четыреугольника, многоугольниковъ и круга.

Брадвардинъ говоритъ, что площадь круга равна прямоугольнику, стороны котораго суть половина окружности и половина діаметра. Онъ беретъ это предложеніе безъ доказательства изъ книги Архимеда *De quadratura circuli*, гдѣ оно выражено нѣсколько иначе, именно: *всякій кругъ равенъ прямоугольному треугольнику, котораго одинъ катетъ равенъ радіусу круга, а другой—окружности того же круга.* Брадвардинъ прибавляетъ, что отношеніе окружности къ діаметру ѐсть $\frac{22}{7}$ „*hoc ut habetur ab eodem Archimenide*[228]) *in praedicto libello* (*De quadratura circuli*)".

Въ четвертой части говорится о фигурахъ трехъ измѣреній, о мѣстахъ, о тѣлесныхъ углахъ, о пяти правильныхъ тѣлахъ и о шарѣ.

Книга о шарѣ есть собраніе различныхъ теоремъ о кругахъ, проводимыхъ на этой поверхности; Брадвардинъ говоритъ, что эти теоремы онъ взялъ изъ *Liber sphaericorum* Ѳеодосія.

Наконецъ существуетъ еще особое небольшое сочиненіе о квадратурѣ круга, подъ заглавіемъ: *Tractatus de quadratura circuli editus a quodam archiepiscopo ordinis fratrum minorum.* Сочиненіе это одинаково съ тѣмъ, которое Гаурикъ приписываетъ Кампану. Послѣ того, что мы сказали, нужно допустить, что сочиненіе это можетъ столько же называться именемъ Брадвардина, какъ и именемъ Кампана.

Нашего вниманія заслуживаетъ еще одна идея Брадвардина—первый проблескъ Платоновой философіи, начинавшей проникать въ Европу. Этотъ писатель пытался именно приложить геометрическій методъ къ теологіи и первый бросилъ такимъ образомъ сѣмя того духа независимости, который скоро распространился въ монастыряхъ и семинаріяхъ, и,

---

[228]) Брадвардинъ называетъ Архимеда—*Archimenides*.

поддерживаемый еще болѣе въ слѣдующемъ вѣкѣ другимъ представителемъ церковной власти, философомъ-платоникомъ Николаемъ Куза, стряхнулъ съ себя иго средневѣковой схоластики и предался новой философіи.

Продолжаемъ исторію 14-го столѣтія. Въ началѣ этого столѣтія Педіазимъ (Pediasimus) писалъ о геометріи и геодезіи; монахъ Варлаамъ оставилъ сочиненіе по ариѳметикѣ и сочиненіе по алгебрѣ въ шести книгахъ; послѣднее, подъ заглавіемъ *Logisticae libri VI*, написано на греческомъ языкѣ [229]), для изученія котораго авторъ, родомъ итальянецъ, жилъ на востокѣ. Латинскій переводъ этой алгебры напечатанъ въ 1572 году (Strassburg, in—8°), потомъ въ 1606 году (Paris, in—4°) съ объясненіями Шамбера (Jean Chamber). Оригиналъ есть можетъ быть самое древнее изъ дошедшихъ до насъ сочиненій по алгебрѣ, если не считать сочиненія Фибонакки, которое болѣе чѣмъ на столѣтіе древнѣе.

Киллингвортъ (Killingworth) оставилъ астрономическія таблицы и сочиненіе объ *Algorismus*.

Симонъ Бредонъ составилъ комментарій къ Альмагесту Птоломея [230]) и написалъ сочиненіе по ариѳметикѣ.

Исаакъ Аргиръ (Argyrus), греческій монахъ, вычислилъ астрономическія таблицы и написалъ много сочиненій: объ астролябіи, объ ариѳметикѣ: *De extractione radicis quadraticae quadratorum irrationalium*; по геодезіи: *Compendium geodaesiae seu de dimensione locorum methodus brevis et tuta*; и по различнымъ отдѣламъ геометріи: *De inventione*

---

[229]) Предлагая отчетъ о той части этого сочиненія, въ которой говорится объ астрономическихъ вычисленіяхъ, Деламбръ помѣщаетъ автора ранѣе Беда, говоря, что ему неизвѣстно въ точности, когда онъ жилъ. Это—странная невнимательность, такъ какъ Варлаамъ есть лицо извѣстное также и въ литературной и въ политической исторіи 14-го вѣка.

[230]) Бернардъ назначалъ это сочиненіе для VIII части своего сборника, о которомъ мы говорили выше. Заглавіе сочиненія было: *Super demonstrationes aliquas Almagesti*: *Opus perdoctum*.

quadrangularium laterum; *Theoremata de triangulis; De dimensione triangulorum aliarumque figurarum*; *De figuris non rectangulis ad rectangulas reducendis*.

Ни одно изъ этихъ сочиненій не напечатано и мы сожалѣемъ, что не можетъ указать, въ чемъ заключалось ихъ содержаніе и что они для времени своего появленія представляли новаго и полезнаго. Эдуардъ Бернардъ включилъ въ свое собраніе древнихъ авторовъ одно изъ нихъ, подъ заглавіемъ: *De figurarum transmutatione* на греческомъ и на латинскомъ языкахъ.

Паоло Дигомари (Paolo di Digomari), извѣстный подъ именемъ *Paolo dell' Abbaco*, писалъ объ алгебрѣ, геометріи и астрономіи и былъ замѣчательный литераторъ, котораго можно назвать рядомъ съ его знаменитыми современниками Дантомъ и Петраркой.

Монтукла относитъ къ 14-му столѣтію писателя Biagio di Parma, который оставилъ сочиненія по ариѳметикѣ, геометріи, астрономіи и оптикѣ, и былъ для своего времени человѣкъ необыкновенный. Лука Бурго ссылается на него, также какъ на другихъ позднѣйшихъ писателей, которые были ему полезны при составленіи *Summa de Arithmetica* etc. Но онъ помѣщаетъ его непосредственно послѣ Леонарда изъ Пизы, прежде Сакро Боско и Prosdocimo изъ Падуи, и это заставляетъ предполагать, что онъ относитъ его къ 13-му столѣтію, такъ какъ вообще онъ соблюдаетъ хронологическій порядокъ въ указаніи авторовъ: изъ древнихъ онъ приводитъ Евклида и Боэція, изъ новыхъ же Леонарда изъ Пизы, Biagio изъ Пармы, Сакро Боско и Prosdocimo изъ Падуи.

Послѣдній жилъ въ концѣ 14-го и въ началѣ 15-го вѣка; онъ вычислялъ астрономическія таблицы и написалъ книгу *De algorithmo*; Монтукла предполагаетъ, что въ ней говорилось объ алгебрѣ (*Histoire des Mathématiques*, t. II, p. 716). Но сочиненіе это по всей вѣроятности было простымъ изложеніемъ практической ариѳметики, какъ всѣ сочиненія съ

подобнымъ же заглавіемъ; притомъ Бернардинъ Бальди ссылается на этого автора такъ, какъ будто онъ писалъ только объ ариѳметикѣ, а не объ алгебрѣ. Это сочиненіе *De algorithmo* въ 1483 году было напечатано и можетъ быть оно есть первое изъ сочиненій о нашей системѣ счисленія, сдѣлавшееся извѣстнымъ чрезъ посредство печати. Правда *Compendium arithmetices Boëtii* Фабера (Stapulensis) было напечатано еще въ 1480 году, но оно относится къ умозрительной ариѳметикѣ или къ теоріи чиселъ, независящей отъ способа изображенія чиселъ и употребляющей только нѣкоторыя изъ нихъ, чтобы выразить чрезъ нихъ остальныя. [231]).

Коссали (Cossali) въ своей исторіи алгебры [232]) приводитъ многихъ Итальянцевъ, писавшихъ объ этой наукѣ въ 14-мъ столѣтіи. Между прочимъ мы узнаемъ отъ него, что Вильгельмъ Лунисъ (Lunis) перевелъ алгебру Могаммеда-бенъ-Муза, подъ заглавіемъ: *La regola dell' algebra*. Говоря о геометріи Арабовъ, мы упомянули, что съ этого сочиненія было сдѣлано въ 13-мъ и 14-мъ столѣтіяхъ много другихъ латинскихъ переводовъ; одинъ изъ нихъ воспроизведенъ Либри въ первомъ томѣ *Histoire des sciences mathématiques*.

Въ 14-мъ вѣкѣ изъ всѣхъ наукъ наиболѣе разработывалась астрономія. Большинство тогдашнихъ астрономовъ оставили сочиненія объ астролябіи. Мы не будемъ называть ихъ, такъ какъ собственно по геометріи они, кажется, не писали.

---

[231]). Сочиненіе Просдоцимо представляетъ кажется интересъ въ томъ отношеніи, что подтверждаетъ мнѣніе Валлиса, о значеніи словъ *abacus* и *algorismus:* Валлисъ предполагаетъ, что первое замѣнилось вторымъ въ концѣ среднихъ вѣковъ; въ одной рукописи изъ *Bibl. Bodleiana* онъ прочелъ, что Германъ Контрактъ и Просдоцимо писали объ *abacus*'ѣ, и прибавляетъ, что это другими словами значитъ *algorismus*, или арабская система счисленія. Заглавіе сочиненія Просдоцимо, котораго Валлисъ не зналъ, подтверждаетъ вполнѣ его мнѣніе.

[232]). *Storia critica dell' origine, transporto e primi progressi in Italia dell' Algebra.* Parma, 1797, 2 Vol. in—4°.

Изъ вышесказаннаго видно, что у христіанъ въ средніе вѣка математическія науки слагались весьма медленно съ 8-го по 14-е столѣтіе: сначала были заимствованы у Грековъ и перенесены Боеціемъ, Кассіодоромъ и Исидоромъ Севильскимъ только самыя поверхностныя понятія, потомъ, въ 12-мъ столѣтіи, являются настоящія ученыя сочиненія, перенесенныя изъ Испаніи и переведенныя съ арабскаго на латинскій языкъ. Но, какъ видно изъ сказаннаго нами выше, число такихъ сочиненій было весьма ограниченно; мы встрѣтили переводы Евклида, Ѳеодосія, Птоломея, Альгазена, Могаммеда-бенъ-Муза; затѣмъ, по нѣкоторымъ мѣстамъ Оптики Вителліо, мы могли только догадываться, что извѣстны были коническія сѣченія Аполлонія, но не могли указать ни на одинъ переводъ этого важнаго сочиненія, и еще менѣе на переводы Архимеда, Герона, Менелая, Паппа, Серена, Прокла. Однако нельзя думать, чтобы сочиненія этихъ греческихъ геометровъ, переведенныя много разъ на арабскій языкъ, не проникли къ европейскимъ христіанамъ въ 12-мъ и 13-мъ столѣтіяхъ вмѣстѣ съ элементами Евклида. И латинскіе переводы нѣкоторыхъ изъ нихъ дѣйствительно существуютъ [233]). Но ихъ рѣдкость и неизвѣстность геометровъ, которые ихъ издавали, или которые ими пользовались, доказываютъ, что эти сочиненія были мало извѣстны и что математика въ концѣ 14-го вѣка была еще въ дѣтствѣ сравнительно съ тѣмъ цвѣтущимъ состояніемъ, какого она достигала у Грековъ въ первые времена Александрійской школы и у Арабовъ въ 11-мъ столѣтіи [234]).

---

[233]). Преимущественно въ рукописи королевской библіотеки, озаглавленной: *Mathematica* (Suppl. lat. № 49, in fol.). Либри въ *Histoire des sciences mathématiques en Italie* T. I, p. 265 даетъ перечень сочиненій, заключающихся въ этомъ томѣ.

[234]). Должно сказать вообще, что мы еще слишкомъ неполно знаемъ средневѣковую исторію, которая до сихъ поръ оставлялась безъ вниманія, такъ какъ предметомъ изученія, со времени 15-го вѣка, служила исключительно греческія литература и наука, доставляющія для нашего знанія источники, несравненно болѣе богатые содержаніемъ.

15-е столѣтіе. Въ пятнадцатомъ столѣтіи, которое было временемъ всеобщаго возрожденія наукъ и искуствъ въ Европѣ, математическія науки получили новый и плодотворный толчокъ, быстро подготовившій великіе успѣхи, долженствовавшіе совершиться въ слѣдующемъ вѣкѣ. Толчокъ этотъ вызванъ былъ знакомствомъ съ греческими сочиненіями, которыя въ первый разъ начали изучать на языкѣ подлинниковъ и затѣмъ изготовлять переводы, имѣвшіе назначеніемъ ознакомить съ геометріею Евклида, Архимеда, Аполлонія и другихъ великихъ писателей древности.

Уже эти первые шаги представляютъ значительный успѣхъ въ дѣлѣ изученія наукъ и ихъ однихъ было бы достаточно для славы 15-го столѣтія. Но въ то же время снова возбужденъ былъ еще другой элементъ, въ извѣстномъ смыслѣ чуждый греческой наукѣ,—именно индѣйская алгебра, остававшаяся уже 300 лѣтъ въ Европѣ безъ значенія; теперь показаны были ея приложенія, и важность ея обнаружена въ надлежащемъ свѣтѣ. Связь ея съ геометріей, указанная еще Фибонакки, не оставалась теперь только безплодной идеей, но сдѣлалась переходящимъ въ практику принципомъ. Наконецъ славѣ 15-го вѣка содѣйствовали и нѣкоторыя оригинальныя произведенія — первые плоды генія и первыя примѣненія знаній, заимствованныхъ у Грековъ и Арабовъ. Къ тому же въ рединѣ этого вѣка изобрѣтено книгопечатаніе, которое послужило могучимъ пособіемъ для стремленій человѣческаго духа, встрѣчавшихъ прежде препятствія и остановки вслѣдствіе рѣдкости и недостатка рукописей. Это достопамятное открытіе было, можно сказать, дополненіемъ къ другому великому событію 15-го столѣтія,—къ завоеванію Константинополя, благодаря которому Европа получила искуства, литературу, философію и науку древней Греціи [235]).

---

[235]). Многія другія событія того времени, какъ-то: открытіе Америки, мыса Доброй Надежды, Остъ-Индіи, также помогли усовершенствованію астрономіи, оптики и геометріи и содѣйствовали всеобщей ум-

Сдѣлаемъ краткій обзоръ геометровъ, которымъ мы обязаны первыми работами, представляющими начало нашихъ успѣховъ въ наукѣ.

Прежде всѣхъ находимъ Пурбаха и выше всѣхъ—его знаменитаго ученика Регіомонтана.

Первый извѣстенъ преимущественно какъ астрономъ и какъ издатель *Theoricae Planetarum* [236]). Это сочиненіе было продолженіемъ сочиненія Сакро Боско о сферѣ, и назначалось для пополненія Птоломеева Альмагеста, который былъ у Пурбаха безъ вычисленій и безъ геометрическихъ доказательствъ. Впослѣдствіи Пурбахъ началъ переводъ геометрической части Альмагеста, только что доставленной въ Европу кардиналомъ Бессаріономъ. Переводъ этотъ, не оконченный вслѣдствіе ранней смерти Пурбаха, продолжалъ потомъ Регіомонтанъ; онъ былъ изданъ въ 1496 году въ Венеціи, подъ заглавіемъ: *Ptolemaei Alexandrini astronomorum principis in magnam constructionem Georgii Purbachii, ejusque discipuli Johannis de Regiomonte astronomicon epitoma.* Venetiis, 1496, in fol.

Оба ученые переводчика ввели въ тригонометрическія вычисленія Птоломея *синусы* вмѣсто *хордъ*, что сдѣлано было также Альбатегніемъ и послѣ него другими арабскими писателями; но они удержали выраженіе $\frac{sinus}{cosinus}$ и не употребляли тангенсовъ, введенныхъ въ тригонометрію еще за 500 лѣтъ Ибнъ-Юнисомъ и Абулъ-Вефой. Впослѣдствіи Регіомонтанъ самостоятельно дошелъ до этого и составилъ таблицы тангенсовъ, извѣстныя подъ именемъ *Tabula foecunda.*

Регіомонтанъ есть одинъ изъ замѣчательнѣйшихъ людей въ исторіи математики. Объемъ свѣдѣній, необыкновенная

ственной дѣятельности и тому сильному движенію, которое получило въ ту эпоху научное образованіе.

[236]). Сочиненіе *Theoricae Planetarum* сначала напечатано въ Венеціи въ 1488 году in 4°, чрезъ 28 лѣтъ послѣ смерти автора; послѣ того оно очень часто перепечатывалось и большею частію съ комментаріями.

дѣятельность ума и большое число сочиненій заставляютъ смотрѣть на него, какъ на истиннаго возобновителя наукъ въ Европѣ. Произведенія его состоятъ, съ одной стороны, изъ важнѣйшихъ сочиненій великихъ геометровъ Александрійской школы Евклида, Архимеда, Аполлонія, Менелая и т. д., которыя Регіомонтанъ первый прочелъ на оригинальномъ языкѣ и перевелъ болѣе правильно, чѣмъ Арабы; съ другой стороны, они состоятъ изъ собственныхъ открытій Регіомонтана. Между послѣдними особенно замѣчателенъ трактатъ его *De triangulis omnimodis libri quinque* (Nürnberg. 1533, in fol.), представляющій полное изложеніе плоской и сферической тригонометріи. Двѣ первыя книги назначены для прямоугольныхъ треугольниковъ; въ нихъ множество задачъ, являющихся въ первый разъ. Всѣ они заключаются въ томъ, чтобы по тремъ даннымъ частямъ треугольника опредѣлить остальныя. Такъ напримѣръ, въ седьмой задачѣ второй книги дается периметръ и два угла треугольника; въ двѣнадцатой задачѣ той же книги дается основаніе, высота и отношеніе двухъ другихъ сторонъ. Регіомонтанъ говоритъ, что задача эта еще не рѣшена геометрическимъ способомъ [237]). И онъ при этомъ прилагаетъ алге-

---

[237]). Чисто геометрическое рѣшеніе этой задачи не представляетъ никакой трудности и я не знаю, почему Регіомонтанъ считалъ необходимымъ приложить здѣсь алгебру. По смыслу задачи вершина треугольника находится, вопервыхъ, на прямой параллельной данному основанію и вовторыхъ, на окружности, представляющей геометрическое мѣсто точекъ, разстоянія которыхъ отъ концовъ основанія находятся въ данномъ отношеніи остальныхъ сторонъ.

Теорема эта извѣстна была древнимъ: Паппъ говоритъ, что она находилась во второй книгѣ: *Loca plana* Аполлонія; Евтоцій въ началѣ своего комментарія къ коническимъ сѣченіямъ Аполлонія доказываетъ ее, чтобы показать примѣръ *геометрическихъ мѣстъ*, употреблявшихся древними при рѣшеніи задачъ. Ее находимъ также въ *трактатѣ объ извѣстныхъ* Араба Гассана-бенъ-Хаитема (Lib. I, Prop. 9). У новыхъ она встрѣчается въ книгѣ Кардана; *De proportionibus numerorum, motuum* etc. въ сочиненіи Александра Андерсона (см. прим. III о призмахъ); въ *Discorsi e demonstrazioni matematiche* etc. Галилея

бру, которую называетъ *ars rei et census*; получивъ уравненіе второй степени, онъ прибавляетъ: *quod restat praecepta artis edocebunt* [238]). Отсюда видно, что Регіомонтанъ обладалъ знаніемъ алгебры, которое почерпнулъ изъ сочиненія Леонарда изъ Пизы, воспользовавшись имъ въ бытность въ Италіи, или изъ переводовъ алгебры Могаммеда-Бенъ-Муза; и въ этомъ нѣтъ ничего удивительнаго, потому что всеобъемлющій и проницательный умъ Регіомонтана не могъ пропустить безъ вниманія такого великолѣпнаго и столь полезнаго открытія, составляющаго самый цѣнный изъ даровъ, полученныхъ нами отъ Арабовъ; но мѣсто это интересно тѣмъ, что доказываетъ повсемѣстное распространеніе знанія алгебраическихъ правилъ между математиками уже въ срединѣ 15-го столѣтія. И дѣйствительно, Регіомонтанъ, самъ употреблявшій часто правила *rei et census*, пишетъ въ письмахъ къ астроному Бланкину, изданныхъ знаменитымъ библіографомъ Де-Мюромъ (De Mur) [239]), что онъ увѣренъ въ глубокихъ познаніяхъ Бланкина объ этомъ искусствѣ [240]);

(p. 39); въ *Loca plana* Аполлонія, возстановленныхъ Ферматомъ, Шутеномъ и А. Симсономъ. Лежандръ помѣстилъ ее въ элементарной геометріи.

[238]). Пусть основаніе будетъ 20, перпендикуляръ 5 и отношеніе сторонъ $^3/_5$—; Регіомонтанъ, принявъ за неизвѣстное разность отрѣзковъ, образуемыхъ перпендикуляромъ на основаніи, приходитъ путемъ геометрическихъ соображеній къ уравненію: 20 *census plus* 2000 *aequales* 680 *rebus*, т.-е. $20x^2+2000=680x$.

Въ 23-й задачѣ, гдѣ рѣчь идетъ о построеніи треугольника, когда даны разность двухъ сторонъ, высота и разность отрѣзковъ, опредѣляемыхъ ею на основаніи, Регіомонтанъ прилагаетъ также правило *rei et census*. Говоря о геометріи Индѣйцевъ, мы упомянули, что задача эта рѣшена въ *Lilavati* Баскары.

[239]). Въ первомъ томѣ своего сборника, подъ заглавіемъ: *Memorabilia Bibliothecarum publicarum Norimbergensium et universitatis Altdorfinae.* Norimbergae, 1786, 2 Vol. in—8⁰.

[240]). *Sed nunc eam eligi quam vobis arbitror familiarissimam, per artem videlicet rei et census quod quaerebatis absolvendo*, p. 94 въ первомъ томѣ вышеприведеннаго сборника.

этотъ послѣдній дѣйствительно пользуется алгеброй въ своихъ отвѣтахъ Регіомонтану.

Въ книгахъ III, IV и V говорится о сферическихъ треугольникахъ.

Третья книга похожа на *Sphaerica* Менелая; четвертая содержитъ полную тригонометрію, а пятая—различныя задачи, рѣшенныя здѣсь въ первый разъ. Особенно замѣчательно предложеніе, соотвѣтствующее извѣстному еще Грекамъ свойству плоскаго треугольника: *дуга большаго круга, дѣлящая уголъ при вершинѣ сферическаго треугольника пополамъ, образуетъ на основаніи два отрѣзка, синусы которыхъ относятся между собою какъ синусы прилежащихъ сторонъ.*

Регіомонтанъ написалъ сочиненіе о практической ариѳметикѣ, которое онъ назвалъ *Algorismus demonstratus.* Сочиненіе это напечатано было Шонеромъ, подъ заглавіемъ *Algorithmus demonstratus*; Шонеръ замѣнилъ слово *algorismus* словомъ *algorithmus,* думая, что сочиненіе Регіомонтана, найденное имъ въ рукописи, должно было получить отъ автора названіе *algorithmus*, которое, по его словамъ, происходитъ отъ греческаго ἀριθμὸς и измѣнено было Сарацинами. Такимъ образомъ Шонеръ не зналъ, что уже втеченіе многихъ столѣтій словомъ *algorismus* означалась наша система счисленія [241]), какъ это видно изъ сочиненій Сакро Боско, Винцента де-Бове и др., и что слѣдовательно Регіомонтанъ употребилъ это названіе съ намѣреніемъ. Сочиненіе это, которое мы уже много разъ имѣли случай приводить, замѣчательно еще по одному обстоятельству, о которомъ мы до сихъ поръ не говорили: въ немъ,

---

[241]). Въ старинной статьѣ, публикованной Кликтовеемъ, подъ заглавіемъ: *Opusculum de praxi numerorum, quod algorismum vocant* и во многихъ другихъ, оставшихся въ рукописи (двѣ въ библіотекѣ Св. Женевьевы и одна, *французская*, въ библіотекѣ арсенала), говорится, что слово *algorismus* происходитъ отъ имени философа *Algus*'а. Но для подобнаго объясненія нѣтъ никакого доказательства.

вмѣсто чиселъ, употреблявшихся въ то время, постоянно употребляются *буквы* и эти отвлеченные знаки, составляющіе особенность новой математики, прилагаются даже къ объясненію самой числовой системы и къ доказательству правилъ практической ариѳметики. Если бы смерть не похитила Регіомонтана въ первомъ періодѣ его блестящей жизни, то ему можетъ быть мы были бы обязаны великимъ открытіемъ Вьета.

Въ вышеуказанномъ собраніи писемъ находимъ тригонометрическое рѣшеніе задачи: *построить вписываемый въ кругъ четыреугольникъ по даннымъ четыремъ сторонамъ.* Говоря о геометріи Индѣйцевъ, мы предложили историческія замѣчанія объ этой задачѣ, занимавшей собою многихъ геометровъ 16-го столѣтія.

Не будемъ говорить о другихъ сочиненіяхъ Регіомонтана, число которыхъ весьма значительно, но которыя къ несчастію остались большею частію неизданными. Перечень ихъ можно найти во многихъ сочиненіяхъ, изъ которыхъ мы укажемъ, какъ полнѣйшія: *Historia matheseos* Геильброннера и *Historia astronomiae* Вейдлера.

Одинъ взглядъ на этотъ перечень возбуждаетъ удивленіе, тѣмъ болѣе, что авторъ былъ похищенъ смертію на 40-мъ году своей жизни, что онъ впродолженіе своего кратковременнаго существованія занятъ былъ главнымъ образомъ астрономическими наблюденіями и вычисленіями; въ теченіе тридцати лѣтъ вычислялъ обширныя эфемериды и притомъ въ то время, когда не было еще пособія логариѳмовъ, что онъ наконецъ былъ искуснымъ механикомъ и завѣдывалъ типографіей: все это удивляетъ и дѣлаетъ понятнымъ, почему Рамусъ ставилъ его на ряду съ великими геніями Греціи [242]).

---

242). *Norimberga tum Regiomontano fruebatur: mathematici inde et studii et operis gloriam tantam adepta, ut Tarentum Archyta, Syracusae Archimede, Bizantium Proclo, Alexandria Ctesibio, non justius quam Norimberga Regiomontano gloriari possit.* (*Scholae mathematicae*, lib. 2, p. 62)

Кардиналъ Николай Куза, сочиненія котораго хотя и содержатъ многіе промахи, лишающіе ихъ въ настоящее время всякой цѣны, принадлежалъ тѣмъ не менѣе къ числу людей, наиболѣе способствовавшихъ дѣлу возрожденія наукъ. Онъ признавалъ ихъ важность и распространялъ, стремясь примѣнить ихъ во всѣхъ своихъ сочиненіяхъ, даже въ тѣхъ, которыя относились къ теологіи. Въ этомъ онъ слѣдовалъ примѣру, показанному за полтора вѣка передъ тѣмъ Брадвардиномъ.

О Николаѣ Куза упоминаютъ между прочимъ по поводу квадратуры круга, приписывая ему первому мысль разсматривать кругъ, катящійся по прямой линіи. Въ этой идеѣ думали найти первые слѣды циклоиды и Валлисъ старался возвести начало это кривой, сдѣлавшейся столь извѣстною въ 17-мъ столѣтіи, до Николая Кузы, упрекая его въ томъ, что онъ принялъ ее за дугу круга. Но въ сочиненіяхъ кардинала ничто, кажется, не указываетъ, чтобы онъ имѣлъ въ мысли разсматривать кривую, образуемую точкою окружности, катящейся по прямой линіи; дуга, которую онъ чертитъ, служитъ только для опредѣленія на прямой точки, въ которую приходитъ послѣ цѣлаго оборота круга та точка, которая первоначально находилась на прямой. Можно, кажется, думать, что начала своего построенія онъ нашелъ путемъ механическихъ попытокъ [243]).

---

[243]). Математическія сочиненія Николая Куза составляютъ третью часть собранія его сочиненій, напечатаннаго въ Парижѣ въ 1514 г. in fol. и въ Базелѣ въ 1565 г. in fol. Они состоятъ изъ слѣдующихъ статей: 1) *De geometricis transmutationibus;* 2) *De arithmeticis complementis;* 3) *De mathematicis complementis*; 4) *De quadratura circuli;* 5) *De sinibus et chordis;* 6) *De una recti curvique mensura;* 7) *Complementum theologicum figuratum in complementis mathematicis;* 8) *De mathematica perfectione;* 9) *Reparatio calendarii;* 10) *Correctio tabularum Alfonsi;* 11) *Alia quaedam ex Gaurico in Cusam adjecta.*

Большая часть этихъ сочиненій относится къ квадратурѣ круга, которою Николай Куза занимался, кажется, постоянно. Въ книгѣ *De mathematicis complementis* авторъ говоритъ о коническихъ сѣченіяхъ и показываетъ построеніе ихъ на плоскости.

Кардиналъ Куза знаменитъ въ исторіи тѣмъ, что онъ призналъ начала платоновой философіи, и еще болѣе тѣмъ, что первый возобновилъ ученіе Пиѳагора о движеніи земли вокругъ солнца,—ученіе съ такимъ успѣхомъ повторенное впослѣдствіи Коперникомъ и Галилеемъ.

15-е столѣтіе представляетъ намъ двухъ знаменитыхъ живописцевъ Альбрехта Дюрера и Леонардо-да-Винчи, которые должны быть причислены также къ числу ученѣйшихъ геометровъ своего времени. Первый изъ нихъ написалъ сочиненіе по геометріи для архитекторовъ и живописцевъ. Первоначально оно было написано по-нѣмецки, потомъ позднѣе издано на латинскомъ языкѣ, подъ слѣдующимъ заглавіемъ, указывающимъ предметъ сочиненія: *Institutionum geometricarum libri quatuor, quibus lineas, superficies et solida corpora ita tractavit, ut non matheseos solum studiosis, sed et pictoribus, fabris aerariis ac lignariis, lapicidis, statuariis et universis demum qui circino, gnomone, libella, aut alioqui certa mensura opera sua examinant, sint summe utiles et necessarii.*

Въ первой книгѣ Альбрехтъ Дюреръ показываетъ способы черченія различныхъ кривыхъ линій; тутъ мы находимъ многія спиральныя линіи: плоскія, цилиндрическія, сферическія и коническія; черченіе эллипса посредствомъ удлинненія ординатъ круга въ постоянномъ отношеніи, или, разсматривая его какъ сѣченіе прямаго конуса, который авторъ называетъ *пирамидой*; также показаны способы черченія двухъ другихъ коническихъ сѣченій, гиперболы и параболы. Это сочиненіе одно изъ самыхъ древнихъ, въ которыхъ говорится о коническихъ сѣченіяхъ.

Въ первой же книгѣ находимъ черченіе по точкамъ эпициклоиды, образуемой точкою, взятою въ плоскости круга, катящагося по неподвижной окружности.

Во второй книгѣ заключается вписываніе въ кругъ многоугольниковъ и различныя правильныя фигуры, составленныя изъ дугъ круга; потомъ квадратура круга и способъ для

наполненія плоской фигуры различными многоугольниками; звѣздчатыхъ же многоугольниковъ здѣсь не находимъ. Изложивъ построеніе вписаннаго въ кругъ пятиугольника, находящееся въ первой книгѣ Альмагеста Птоломея, Дюреръ показываетъ способъ построить правильный пятиугольникъ по данной сторонѣ; построеніе это замѣчательно тѣмъ, что оно выполняется однимъ отверстіемъ циркуля; но оно только приблизительное и фигура, получившая названіе *пятиугольника Дюрера*, имѣетъ не всѣ углы равные [244]), какъ это въ слѣдующемъ столѣтіи доказали J. Bapt. de Benedictis [245]) и Клавій [246]). Построеніе Дюрера, благодаря своей простотѣ, употребляется впрочемъ большинствомъ архитекторовъ.

Въ третьей книгѣ говорится о тѣлахъ, о колоннахъ и пирамидахъ различной формы и о линіяхъ на этихъ поверхностяхъ, употребляемыхъ въ искусствѣ; потомъ о построеніи солнечныхъ часовъ и о черченіи буквъ алфавита.

Въ пятой книгѣ авторъ даетъ описаніе пяти правильныхъ тѣлъ и многихъ другихъ, составленныхъ изъ правильныхъ, но не равныхъ между собою, многоугольниковъ, въ родѣ тринадцати полуправильныхъ тѣлъ Архимеда. Затѣмъ находимъ нѣсколько рѣшеній задачи объ удвоеніи куба и наконецъ изложеніе перспективы, гдѣ авторъ придумываетъ первый извѣстный инструментъ для механическаго черченія перспективы на стеклѣ, или на прозрачномъ полотнѣ. По этому именно поводу сочиненіе Дюрера обыкновенно и упоминается въ исторіи математики.

Леонардо-да-Винчи, одинъ изъ величайшихъ художниковъ Италіи, принадлежалъ къ числу тѣхъ рѣдкихъ геніевъ, которые съ одинаковою легкостію работаютъ во всѣхъ обла-

---

[244]). Въ правильномъ пятиугольникѣ каждый уголъ равенъ 108°; въ пятиугольникѣ же Альбрехта Дюрера два угла = 107°2′; другіе два = 108°22′, а пятый = 109°12′.

[245]). *Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum Liber.* Turin, 1585, in fol.

[246]). *Geometria practica*, lib. VIII, prop. 29.

стяхъ человѣческаго знанія, такъ что въ исторіи каждой изъ нихъ имя ихъ находитъ себѣ мѣсто. Онъ въ особенности занимался математикой и науками, отъ нея зависящими, какъ то: физикой, раціональной и практической механикой, гидростатикой, музыкой и т. д. въ томъ убѣжденіи, какъ говоритъ онъ, *что нѣтъ никакой достовѣрности въ тѣхъ наукахъ, къ которымъ, хотя въ нѣкоторыхъ частяхъ, не прилагается математика, или которыя какимъ нибудь образомъ отъ нея не зависятъ.* Это—истина, которая и въ наши дни еще слишкомъ мало сознана, не смотря на успѣхи, сдѣланные человѣческимъ разумомъ въ теченіи трехъ столѣтій.

Послѣ Леонардо-да-Винчи осталось много рукописей, въ которыхъ разсѣяны его новыя воззрѣнія и размышленія о различныхъ отдѣлахъ математическихъ наукъ; но записки эти къ несчастію до сихъ поръ еще не разобраны и остаются забытыми, не принося никакого плода. Болонскій профессоръ Вентури хотѣлъ издать важнѣйшую часть ихъ, относящуюся къ тремъ отдѣламъ: къ механикѣ, гидравликѣ и оптикѣ; но къ сожалѣнію предпріятіе это осталось безъ исполненія. Мы обязаны Вентури только нѣкоторыми отрывками изъ физико-математическихъ сочиненій Леонара-да-Винчи [247]). Изъ перваго, носящаго заглавіе: *О паденіи тяжелыхъ тѣлъ въ соединеніи съ вращеніемъ земли*, видно, что знаменитый художникъ признавалъ движеніе земли,—мысль, высказанную за нѣсколько лѣтъ прежде Николаемъ Куза, сочиненія котораго впрочемъ не могли еще быть извѣстны.

Мы не будемъ распространяться далѣе о физико-математическихъ работахъ Леонардо-да-Винчи. Но мы должны упомянуть здѣсь объ одномъ его изобрѣтеніи въ механикѣ, существенно касающемся геометріи, въ которомъ мы видимъ первый зародышъ теоріи, очень мало разработанной въ послѣдствіи, но тѣмъ не менѣе достойной вниманія геометровъ.

---

[247]). *Essai sur les ouvrages physico-mathématiques de Leonard da Vinci, avec fragmens tirés de ses manuscrits.* Paris, an V, in—4⁰.

Мы говоримъ о токарномъ станкѣ для выдѣлки оваловъ, изобрѣтеніе котораго приписываетъ Леонардо-да-Винчи ученикъ его Ломаззо въ слѣдующихъ словахъ: „*Винчи былъ также изобрѣтателемъ станка для оваловъ, удивительнаго снаряда, употребленію котораго одинъ ученикъ Melzi научилъ Дениса, брата Маджіоре, и этотъ въ настоящее вермя пользуется имъ съ большимъ искусствомъ.*“ (Lomazzo, *Trattato della Pittura*, p. 17).

Намъ кажется, что станокъ для оваловъ, мало обращавшій на себя вниманіе геометровъ, такъ какъ для него нѣтъ никакой математической теоріи, основывается на совершенно новой идеѣ объ образованіи кривыхъ, и эта идея должна вести къ новымъ геометрическимъ изслѣдованіямъ.

До сихъ поръ образованіе кривыхъ основывалось на томъ, что онѣ чертились подвижнымъ остріемъ на неподвижной плоскости. Винчи произвелъ черченіе обратнымъ образомъ, т. е. посредствомъ неподвижнаго острія, отмѣчающаго линію на движущейся плоскости: это и происходитъ въ станкѣ, служащемъ для выдѣлки эллипса.

Какое же должно сообщить движеніе плоскости, чтобы получить эллипсъ? Такой вопросъ долженъ былъ предложить себѣ Леонардо-да-Винчи. Вопросъ этотъ, какъ мы видимъ, совершенно новаго рода; и знаменитый живописецъ изъ безчисленнаго множества возможныхъ рѣшеній съумѣлъ найти безспорно самое простое: оно сводится къ тому, что подвижная плоскость получаетъ такое движеніе, при которомъ стороны угла постоянной величины скользятъ по двумъ неподвижнымъ точкамъ. Для исторіи науки было бы любопытно знать тѣ геометрическія соображенія, которыя привели къ этому прекрасному результату.

Несмотря на интересъ, который должна бы возбудить эта задача, какъ новое и общее средство черченія кривыхъ, не только для искуствъ, но и для чисто геометрическихъ изысканій,—она до сихъ поръ почти не подвинута впередъ. Мы полагаемъ, если только наши историческія изслѣдованія объ

этомъ не вводятъ насъ въ ошибку, что одинъ только геометръ, знаменитый Клеро, обратилъ на нее вниманіе и прочелъ объ этомъ предметѣ мемуаръ въ 1740 году въ Академіи Наукъ. Указавъ на этотъ новый способъ черченія кривыхъ и приведя единственный извѣстный примѣръ, т.-е. станокъ для оваловъ, Клеро говоритъ, что сначала онъ предполагалъ, что образуемая помощію станка кривая должна быть круговою конхоидой, но потомъ вскорѣ убѣдился, что она есть настоящій эллипсъ Аполлонія. Потомъ онъ дѣлаетъ два приложенія новаго способа. Въ первомъ изъ нихъ предполагается, что кругъ катится по прямой, а во второмъ—кругъ же по другому кругу. Неподвижное остріе чертитъ на плоскости катящагося круга кривую и Клеро ищетъ ея уравненіе. Рѣшеніе его чисто аналитическое и полученныя имъ уравненія содержатъ даже интеграціи, которыя до сихъ поръ не выполнены. Въ единственномъ только случаѣ интегралы исчезаютъ и получается Архимедова спираль.

Въ геометрическомъ отношеніи задача оставлена Клеро незатронутой; т.-е. разныя геометрическія свойства этого способа черченія кривыхъ, отношеніе его къ обыкновенному способу черченія посредствомъ подвижнаго острія и средства замѣнять одно построеніе другимъ, для полученія одной и той же кривой,—все это еще новые вопросы.

Намъ кажется, что вопросы эти, какъ въ теоретическомъ отношеніи, такъ и по примѣнимости ихъ къ искусствамъ, заслуживаютъ научнаго изслѣдованія. Мы возвратимся къ этому въ другомъ сочиненіи. Теперь же сошлемся на Примѣчаніе XXXIV, въ которомъ изложены нѣкоторыя подробности этой теоріи, представляющей весьма замѣчательный примѣръ *двойственности*, и ограничимся замѣчаніемъ, что изъ этой теоріи, безъ всякихъ вычисленій, оказывается, что кривыя, для которыхъ Клеро нашелъ столь сложное алгебраическое выраженіе,—такъ что онъ могъ опредѣлить свойства только одной изъ нихъ, именно Архимедовой спирали,—суть просто эпициклоиды. Однѣ изъ нихъ могутъ описы-

ваться подвижною точкой, неизмѣняемо соединенной съ прямою, катящеюся по окружности; другія описываются точкою въ плоскости круга, катящагося по неподвижному кругу.

Вернеръ не былъ писатель столь же обширнаго и плодовитаго ума, какъ Леонардъ-да-Винчи и Регіомонтанъ,—эти два названные нами великіе человѣка 15-го столѣтія. Но въ качествѣ только простаго геометра онъ долженъ быть помѣщенъ непосредственно послѣ Регіомонтана. Сочиненія его не представляютъ подражаній или воспроизведеній греческихъ твореній, какъ это обыкновенно бывало въ первое время возрожденія наукъ; напротивъ,—это плоды собственныхъ идей автора; они носятъ на себѣ отпечатокъ оригинальности и обнаруживаютъ замѣчательнаго и основательнаго геометра.

Въ книгѣ, напечатанной въ 1522 году, Вернеръ говоритъ о коническихъ сѣченіяхъ, о удвоеніи куба и о задачѣ Архимеда: раздѣлить шаръ плоскостью на двѣ части въ данномъ отношеніи [248]). Четвертая часть книги посвящена астрономіи [249]). Въ третьей эпохѣ мы уже говорили о небольшомъ его сочиненіи о коническихъ сѣченіяхъ, которое замѣчательно нетолько тѣмъ, что первое явилось въ Европѣ, но еще тѣмъ, что основано на способѣ, отличающемся отъ способа древнихъ. Вернеръ разсматриваетъ коническія сѣченія на конусѣ, пользуясь свойствами этой поверхности для вывода очень легкимъ способомъ свойствъ кривыхъ линій. Это ра-

---

[248]). Евтоцій въ комментаріѣ на вторую книгу о шарѣ и цилиндрѣ приводитъ рѣшенія этой задачи, данныя Діонисидоромъ и Діоклесомъ.

[249]). *Libellus super viginti duobus elementis conicis.—Commentarius, seu paraphrastica enarratio in undecim modos conficiendi ejus problematis quod cubi duplicatio dicitur.—Commentatio in Dionysidori problema, quo data sphaera plano sub data ratione secatur. Alius modus idem problema conficiendi ab eodem Vernero novissime compertus, demonstratusque.—De motu octavae sphaerae tractatus duo, ut et summaria enarratio theoricae motus octavae spharae.* Norimbergae, 1522, in—4⁰.

ціональный пріемъ, который черезъ 50 лѣтъ послѣ этого употреблялся Мавроликомъ и на которомъ потомъ основаны были работы Дезарга, Паскаля и Де-Лагира.

Вернеръ написалъ еще много другихъ сочиненій, которыя не были изданы. Геильброннеръ перечисляетъ ихъ въ своей исторіи математики (стр. 515). Между ними находимъ сочиненіе о сферическихъ треугольникахъ въ пяти книгахъ и статью о приложеніяхъ тригонометріи къ астрономіи и географіи; потомъ статью объ ариѳметикѣ и гномоникѣ и сочиненіе: *Tractatus resolutorius qui prope pedisequus existit libris Datorum Euclidis*, которое, судя по заглавію, должно кажется относиться къ геометрическому анализу древнихъ. Можетъ быть оно, составляя продолженіе *Data* Евклида, содержало нѣчто въ родѣ поризмъ (см. наше мнѣніе объ этомъ въ Примѣчаніи III). Мы очень желали бы имѣть возможность изучить это сочинeніе Вернера.

Намъ остается еще говорить о Лукѣ Пачіоли, извѣстномъ вообще подъ именемъ Луки Бурго. Главное сочиненіе его относится къ концу 15-го столѣтія и на него можно смотрѣть, какъ на начало итальянской школы, изъ которой произошли Карданъ и Тарталеа и которая такъ могущественно содѣйствовала выработкѣ новой формы, принятой математикою со времени ея возрожденія и проистекшей отъ соединенія индѣйской алгебры съ геометріею грековъ. Сочиненіе это есть: *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni e Proportionalita*. Оно было напечатано въ первый разъ Paganino de Paganinis изъ Бресчіи въ 1494-мъ и потомъ еще разъ въ 1523 году. Мы уже часто имѣли случай упоминать объ этомъ сочиненіи и указывать на вліяніе, которое оно имѣло на обновленіе науки; поэтому здѣсь мы ограничимся краткимъ разборомъ содержанія его; мы не сдѣлали бы и этого, если бы сочиненіе это было болѣе извѣстно и не такъ рѣдко.

Оно распадается на двѣ главныя части: первая, относящаяся къ наукѣ исчисленій, обнимаетъ ариѳметику и алгебру;

во второй говорится о геометріи. Авторъ доказываетъ, что пособіемъ при составленіи его сочиненія служили ему сочиненія: Евклида, Боэція, Леонарда изъ Пизы, Джіордано Біаджіо изъ Пармы, Сакро Боско и Просдочимо изъ Падуи.

Первая часть есть полное изложеніе теоретической ариѳметики, разсматривающей свойства чиселъ, и практической ариѳметики.

Теоретическая ариѳметика въ такомъ же родѣ, какъ сочиненія Никомаха, Теона, Боэція и Іордана Неморарія. Но она оканчивается статьею о квадратныхъ числахъ, которой нѣтъ въ этихъ сочиненіяхъ и которая въ высшей степени замѣчательна. Это рядъ задачъ, относимыхъ въ настоящее время къ неопредѣленному анализу 2-й степени. Лука Бурго даетъ рѣшенія ихъ, но безъ доказательствъ; онъ говоритъ, что заимствовалъ ихъ изъ сочиненія о квадратныхъ числахъ Леонарда изъ Пизы, гдѣ они доказаны *посредствомъ геометрическихъ соображеній и на чертежахъ*. Рѣшенія эти, особенно тѣ изъ нихъ, которыя относятся къ уравненію $x^2+y^2=A$, отличаются отъ рѣшеній Діофанта и одинаковы съ тѣми, которыя находятся въ индѣйскихъ сочиненіяхъ и которыя въ послѣднемъ столѣтіи даны были Эйлеромъ, какъ мы уже говорили это по поводу геометріи Брамегупты.

Практическая ариѳметика начинается изложеніемъ системы счисленія, „первые изобрѣтатели которой“, говоритъ Лука Бурго, „по мнѣнію однихъ были Арабы, отчего и самое исскусство это получило названіе *abaco*, означающее сокращенно *el muodo arabico*; другіе же“, прибавляетъ онъ, „производятъ это слово отъ греческаго“ [250]). Здѣсь находимъ да-

---

[250]) Это мѣсто показываетъ, что уже во время Луки Бурго происхожденіе нашей системы счисленія не было достовѣрно извѣстно. Значеніе, которое мы придали слову *abacus*, употребляемому Боэціемъ, позволяетъ намъ допустить второе предположеніе Луки Бурго, т.-е. признавать его взятымъ съ греческаго языка. Но какъ бы то ни было, это мѣсто должно принимать въ соображеніе при изслѣдованіяхъ о происхожденіи нашей системы счисленія.

лѣе четыре основныя дѣйствія ариѳметики [251]), теорію прогрессій и извлеченіе квадратныхъ и кубичныхъ корней ариѳметически и геометрически; потомъ вычисленія съ дробями; тройное правило; regula falsi, которое авторъ, слѣдуя Леонарду изъ Пизы называетъ regula Helcataymi и приписываетъ Арабамъ, къ которымъ впрочемъ оно перешло отъ Индѣйцевъ; наконецъ – коммерческую ариѳметику, которая изложена съ большимъ числомъ задачъ и примѣровъ. Этой первой части подражали въ началѣ 16-го столѣтія многіе нѣмецкіе писатели.

Переходя къ алгебрѣ (*Distinctio octava*), Лука Бурго разсматриваетъ ее какъ часть науки объ исчисленіяхъ, наиболѣе полезную для ариѳметики и для геометріи. Онъ говоритъ, что ее по большей части называютъ *Arte maggiore*, или правиломъ *di Cosa*, или *Algebra e Almucabala*. Такъ какъ сочиненіе Луки Бурго было первое напечатанное сочиненіе по алгебрѣ и такъ какъ обыкновенно полагаютъ, что черезъ него геометры познакомились съ этой наукой, то весьма важно замѣтить, что Лука Бурго не представляетъ алгебру, какъ новое искусство, но какъ вещь, съ давнихъ поръ всѣмъ извѣстную (*del vulgo*). Это согласно съ замѣчаніемъ, которое мы сдѣлали, когда давали отчетъ о сочиненіи Регіомонтана, который говоритъ объ алгебрѣ также, какъ о способѣ, на-

---

[251]) Для каждаго дѣйствія авторъ даетъ нѣсколько различныхъ способовъ. Между способами умноженія изложенъ индѣйскій пріемъ, указанный Ганезой въ комментаріѣ къ Лилавати Баскары; онъ состоитъ въ томъ, что умножая каждую цифру множимаго на каждую цифру множителя, пишутъ единицы и десятки произведенія отдѣльно въ противоположныхъ углахъ квадратнаго поля. Этотъ остроумный пріемъ, на которомъ основывается способъ *Неперовыхъ столбцовъ*, былъ кажется, употребителенъ въ средніе вѣка и въ 16-мъ вѣкѣ, потому что мы находимъ его во многихъ рукописяхъ (№ 7378 А и 7352 рукописей парижской королевской библіотеки) и во многихъ печатныхъ сочиненіяхъ, напр. въ *Compendium de lo abaco* Пеллоса, въ *Arithmetica practica* Оронція Фине, въ *Arithmetica practica* Певерона и въ *Scholae mathematicae* Рамуса. Либри нашелъ его также въ одномъ китайскомъ сочиненіи. (*Histoire des sciences mathématiques en Italie*, t. I, p. 341).

ходившемся во всеобщемъ употребленіи у геометровъ. Отсюда слѣдуетъ заключить, что алгебра непрерывно разработывалась, начиная съ 13-го столѣтія, когда она перенесена была въ Европу, благодаря Фибонакки [252]) и появившимся въ то время переводамъ сочиненія Могаммеда-бенъ-Муза.

Лука Бурго доказываетъ прежде всего правило знаковъ, показываетъ ариѳметическія дѣйствія надъ ирраціональными величинами и доказываетъ большую часть предложеній 10-й книги элементовъ Евклида, заключающей въ себѣ обширную теорію этихъ количествъ. Потомъ онъ переходитъ къ уравненіямъ второй степени, при чемъ различаетъ три случая, какъ мы уже замѣтили это, говоря объ алгебрѣ Могаммеда-бенъ-Муза. Онъ замѣчаетъ, что къ этимъ уравненіямъ приводятся многія другія высшихъ степеней. Разсматривая уравненія, содержащія неизвѣстную величину, ея квадратъ и четвертую степень, онъ различаетъ восемь случаевъ, которые при нашемъ обозначеніи выразятся такъ:

$$x^4 = a \qquad x^4 + ax = bx^2$$
$$x^4 = ax \qquad x^4 + a = bx^2$$
$$x^4 = ax^2 \qquad x^4 + ax^2 = b$$
$$x^4 + ax^2 = bx \qquad x^4 = a + bx^2$$ [253]).

---

[252]) Мы соглашаемся съ общепринятымъ мнѣніемъ, повторяя, что Фибонакки первый ввелъ въ Европу алгебру въ началѣ 13-го столѣтія; но мы тѣмъ не менѣе думаемъ, что по крайней мѣрѣ за столѣтіе уже существовали нѣкоторыя знанія изъ этой науки; такое мнѣніе мы основываемъ на вышеупомянутомъ фактѣ, что Іоаннъ (Hispalensis) написалъ въ 12-мъ вѣкѣ сочиненіе объ ариѳметикѣ, подъ заглавіемъ: *Algorismus*, присоединивъ къ нему рѣшеніе уравненій второй степени, извлеченное, какъ онъ говоритъ, изъ книги *De Gebra et Mucabala*.

[253]) Лука Бурго выговариваетъ свои уравненія обыкновенными словами; онъ для сокращенія употребляетъ только буквы *p* и *m* вмѣсто словъ *plus* (*piu*) и *minus* (*meno*). Онъ пишетъ слово *равно*, а не знакъ =. Неизвѣстное онъ называетъ *cosa*, квадратъ его *censo*, четвертую степень *censo de censo;* извѣстное же число—*numero*; такъ что напримѣръ послѣднее уравненіе онъ выговариваетъ такъ: *censo de censo equalea numero e censo*.

Онъ показываетъ, какъ рѣшаются три первыя и три послѣднія; четвертое же и пятое, говоритъ онъ, *невозможны*. Дѣйствительно они не приводятся къ уравненію второй степени, а только къ третьей. Это доказываетъ, что во время Луки Бурго рѣшеніе уравненій третьей степени не было еще извѣстно.

Первая часть сочиненія (ариѳметика и алгебра) оканчичивается правиломъ товарищества и множествомъ задачъ, относящихся къ торговымъ операціямъ и даже двойной бухгалтеріи.

Во многихъ мѣстахъ для объясненія правилъ исчисленія Лука Бурго примѣняетъ геометрическія соображенія; такимъ путемъ онъ доказываетъ regula falsi, правило знаковъ въ алгебрѣ и рѣшеніе уравненій второй степени. Наоборотъ, во второй части сочиненія, имѣющей предметомъ геометрію, Лука Бурго очень часто пользуется алгеброй.

Вторая часть заключаетъ въ себѣ довольно подробное изложеніе элементовъ геометріи. Она основана частію на элементахъ Евклида, но во многихъ отношеніяхъ и отличается отъ нихъ; поэтому мы предлагаемъ здѣсь ея разборъ. Авторъ подраздѣляетъ ее на восемь частей, изъ уваженія, какъ говоритъ онъ, къ восьми блаженствамъ (*a reverentia de le 8 beatitudine*).

Въ первой части, гдѣ говорится о треугольникахъ и четыреугольникахъ, находятся по большей части предложенія, составляющія предметъ 1-ой, 2-ой и 6-ой книгъ Евклида. Предложеніе, что площадь треугольника равна произведенію основанія на половину высоты, авторъ доказываетъ по способу Индѣйцевъ; формулу площади въ функціи трехъ сторонъ онъ выводитъ какъ Фибонакки и три брата Арабы Могамедъ, Гаметъ и Газенъ въ ихъ сочиненіи *Verba filiorum Moisi filii Schaker*. Онъ показываетъ, какъ вычисляется въ треугольникѣ перпендикуляръ (высота) и пользуется при этомъ теоремою объ отрѣзкахъ, образуемыхъ имъ на основаніи. Для этой теоремы онъ даетъ весьма замѣчательное геометрическое доказательство. Здѣсь нужно доказать, что

разность квадратовъ двухъ сторонъ треугольника равна разности квадратовъ отрѣзковъ, образуемыхъ перпендикуляромъ на основаніи, или, что сумма сторонъ, помноженная на разность ихъ, равна основанію, помноженному на разность отрѣзковъ. Лука Бурго строитъ фигуру, въ которую входятъ геометрическія выраженія четырехъ множителей, изъ которыхъ состоитъ это равенство, и изъ сравненія двухъ подобныхъ треугольниковъ онъ заключаетъ, что первое произведеніе равно второму. Доказательство это изящно и элементарно, такъ какъ въ немъ прилагается только теорема о квадратѣ гипотенузы; оно воспроизведено было Тарталеа въ его General Trattato di Numeri e Misure (P. IV, fol. 8).

Во второй части различнымъ образомъ рѣшается слѣдующая задача: даны три стороны треугольника и на двухъ изъ нихъ двѣ точки; опредѣлить длину прямой, соединяющей эти точки.

Въ третьей части говорится о площадяхъ четыреугольника и другихъ многоугольниковъ; при этомъ многія задачи о прямоугольникѣ рѣшены алгебраическимъ путемъ при помощи формулы, которую Лука Бурго заранѣе вывелъ для рѣшенія уравненій второй степени.

Въ четвертой части находятся предложенія, заключающіяся въ третьей книгѣ Евклида, и измѣреніе круга. Авторъ выводитъ отношеніе $\frac{22}{7}$ такъ же, какъ Архимедъ, посредствомъ вписыванія многоугольника о 96 сторонахъ, и показываетъ составленіе таблицы хордъ, данной Птоломеемъ въ первой книгѣ Альмагеста.

Въ пятой книгѣ говорится о дѣленіи фигуръ въ данномъ отношеніи. Это тотъ отдѣлъ геометріи, который составляетъ предметъ сочиненія Магомета Багдадина *De superficierum divisionibus*, разсматриваемаго какъ подражаніе сочиненію Евклида, или даже какъ собственное сочиненіе этого геометра. Лука Бурго пополняетъ этотъ предметъ, разсматривая также дѣленіе круга при данныхъ требованіяхъ.

Шестая часть относится къ объемамъ тѣлъ и содержитъ предложенія 11-й книги Евклида.

Въ седьмой части говорится о различныхъ инструментахъ, употребляющихся на практикѣ для опредѣленія размѣровъ тѣлъ.

Наконецъ восьмая часть есть собраніе ста геометрическихъ задачъ, рѣшенныхъ большею частію посредствомъ алгебры, и затѣмъ изъ статьи о пяти правильныхъ тѣлахъ.

Вотъ нѣкоторыя изъ этихъ ста задачъ.

По двумъ даннымъ сторонамъ и данной площади треугольника опредѣлить третью сторону.

По данной площади и разности сторонъ прямоугольника опредѣлить стороны его.

Пусть a^2 будетъ площадь и d разность двухъ сторонъ; Лука Бурго полагаетъ большую сторону равной *cosa piu* $\frac{d}{2}$, т.-е. $x+\frac{d}{2}$, а меньшую—*cosa meno* $\frac{d}{2}$, или $x-\frac{d}{2}$. Для опредѣленія неизвѣстнаго тотчасъ получается уравненіе

$$x^2-\frac{d^2}{4}=a^2, \text{ откуда } x=\sqrt{\frac{d^2}{4}+a^2}$$

и отсюда находятся прямо величины обѣихъ сторонъ.

Это проще, нежели прямо принять стороны за неизвѣстныя, что повело бы къ двумъ уравненіямъ:

$$yz=a^2,\ y-z=d$$

и окончательно къ уравненію второй степени

$$y^2-dy=a^2.$$

Въ первой части своего сочиненія Лука Бурго даетъ другіе примѣры подобныхъ оборотовъ при вычисленіи, доказывающихъ, что до извѣстной степени алгебра была развита и усовершенствована уже съ давнихъ поръ. Если, напримѣръ, ищутся два числа, сумма квадратовъ которыхъ равна 20, а произведеніе 8, то Лука Бурго не беретъ двухъ уравненій

$x^2+y^2=20$ и $xy=8$, которые повели бы къ уравненію четвертой степени, приводимому къ квадратному; онъ дѣлаетъ лучше: онъ принимаетъ сумму двухъ неизвѣстныхъ $u+v$ за первое искомое, а разность ихъ $u-v$ за второе искомое число [254]) и непосредственно получаемъ два уравненія

$$u^2+v^2=10 \text{ и } u^2-v^2=8,$$

откуда

$$u^2=9,\ v^2=1; \text{ и } u=3,\ v=1.$$

Искомыя числа будутъ слѣдовательно 4 и 2. По изяществу и простотѣ рѣшеніе это похоже на тѣ, кокорыя мы замѣтили въ индѣйскихъ сочиненіяхъ.

Найти діаметръ круга, вписаннаго въ треугольникъ, стороны котораго даны.

Вписать въ треугольникъ два равные круга, чтобы каждый касался другаго круга и двухъ сторонъ.

Вписать въ данный кругъ 3, или 4, или 5, или 6 равныхъ между собою круговъ, чтобы всѣ они касались даннаго и кромѣ того были рясположены такъ, чтобы первый касался втораго, второй—третьяго, третій—слѣдующаго и т. д.

Найти діаметръ круга, описаннаго около треугольника, стороны котораго даны.

Найти стороны треугольника данной площади, въ которомъ вторая сторона на единицу больше первой и третья на единицу же больше второй.

Для треугольника, площадь котораго равна 84, Лука Бурго опредѣляетъ стороны изъ уравненія четвертой степени, приводимаго къ квадратному и получаетъ числа 13, 14 и 15.

Изъ вершинъ треугольника возставляются къ его плоскости три равные перпендикуляра; требуется опредѣлить въ этой плоскости точку, равноотстоящую отъ концовъ трехъ перпендикуляровъ.

---

[254]) Лука Бурго называетъ первое неизвѣстное *cosa*, а второе *quantita*. Онъ говоритъ, что древніе называли второе *cosa seconda*, но новые называютъ его просто *quantita*. (*Distinctio octava; tractatus sextus*).

Опредѣлить діаметръ круга, касающагося двухъ сторонъ даннаго треугольника и имѣющаго центръ на основаніи.

Во всѣхъ этихъ задачахъ данныя числовыя и рѣшенія алгебраическія, зависящія по большей части отъ уравненій второй степени.

Точно также въ первыхъ частяхъ, гдѣ излагаются элементы геометріи, чертежи всегда выражены числами, какъ будто дѣло идетъ о частномъ примѣненіи теоремы. Чтобы вывести напримѣръ формулу, представляющую площадь треугольника въ функціи трехъ сторонъ, авторъ беретъ треугольникъ ABC, стороны котораго суть 13, 14 и 15, и во всѣхъ разсужденіяхъ своихъ употребляетъ эти числа для означенія сторонъ, тогда какъ Греки поступали болѣе отвлеченно, обозначая стороны AB, BC, CA. Этотъ пріемъ заимствованъ у Арабовъ, которые сами получили его отъ Индѣйцевъ; ему исключительно слѣдовали всѣ геометры 16-го вѣка: Карданъ, Стифельсъ, Тарталеа, Бенедиктисъ, Меммій, Коммандинъ, Клавій, Стевинъ, Адріанъ Романъ, Рудольфъ-фанъ-Цейленъ и др. до тѣхъ поръ, пока Вьетъ не ввелъ употребленія буквъ въ алгебрѣ. Ниже мы укажемъ причины подобнаго пріема, преимущества, представляемыя имъ, и невыгоды, отъ него проистекающія.

Лука Бурго оставилъ еще два другія сочиненія, о которыхъ также слѣдуетъ упомянуть, хотя они и не имѣютъ такой важности, какъ то, содержаніе котораго мы только-что изложили. Первое имѣетъ заглавіе: *Lucae Pacioli divina proportione, opera a tutti glingegni perspicaci e curiosi necessaria: ove ciacun studioso di philosophia, prospettiva, pictura, sculptura, architectura, musica e altre matematiche, soavissima, sottile e admirabile dottrina consequira e delectarassi con varie questione di secretissima scientia*. Venetiis, 1509, in—4°. Авторъ называетъ *proportio divina* дѣленіе прямой въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, доказываетъ многія свойства его и дѣлаетъ различныя приложенія къ искусствамъ. Другое сочиненіе Луки Бурго относится къ правиль-

нымъ многоугольникамъ и многогранникамъ и ко взаимному вписыванію ихъ однихъ въ другіе; вотъ его заглавіе: *Libellus in tres partiales tractatus divisus quorumcunque corporum regularium et dependentium active perscrutationis.* Venetiis, 1508, in—4°. Въ этихъ двухъ геометрическихъ сочиненіяхъ авторъ дѣлаетъ опять частыя приложенія алгебры.

Изъ предшествующаго видно, что сочиненія Луки Бурго представляютъ въ сравненіи съ твореніями греческихъ геометровъ особый, существенно отличный отъ нихъ, характеръ, состоящій именно въ постоянномъ соединеніи алгебры съ геометріей. И характеръ этотъ свойственъ почти всѣмъ математическимъ сочиненіямъ 16-го вѣка. Вслѣдствіе того, что изъ всѣхъ сочиненій, излагавшихъ правила алгебры и ея приложенія къ геометріи, сочиненія Луки Бурго были первыя напечатаны, на нихъ вообще смотрятъ, какъ на начало новой формы математическихъ наукъ въ 16-мъ столѣтіи и неизмѣримыхъ успѣховъ этихъ наукъ впослѣдствіи. И въ самомъ дѣлѣ несомнѣнно, что два итальянскіе геометра Карданъ и Тарталеа обязаны своими знаніями и методами сочиненію *Summa de Arithmetica* etc. Луки Бурго, на которое они часто ссылаются. Но есть основаніе думать, что существовали, особенно въ Германіи, другія сочиненія, бывшія также центрами, распространявшими тѣ же начала алгебры и приложенія ея къ геометріи. Это видно изъ сочиненія Стифельса, которое явилось въ 1544 году, подъ заглавіемъ: *Arithmetica integra* (Nürnberg, in—4°) и въ которомъ, какъ и въ *Summa* Луки Бурго, находимъ элементы алгебры и множество геометрическихъ задачъ, рѣшенныхъ при помощи ея. И сочиненіе Стифельса значительно различается отъ сочиненія Луки Бурго: въ немъ мы замѣчаемъ болѣе глубокое знаніе и болѣе долговременное изученіе алгебры и, кромѣ того, нѣкоторую близость къ отвлеченной формѣ, принятой этою наукой впослѣдствіи. Здѣсь напримѣръ находимъ знаки + и — и знакъ извлеченія корня $\sqrt{\ }$; неизвѣстное и степени его, вмѣсто словъ *cosa, censo, cubo, censo de censo* и пр. означаются

также символами; если входитъ нѣсколько неизвѣстныхъ, то второе, третье, четвертое и т. д. означается буквами *A*, *B*, *C* и пр. [255]); существованіе нѣсколькихъ корней уравненія, которое не было извѣстно Лукѣ Бурго, ясно выражено и доказано [256]); что касается до поучительнаго приложенія алгебры къ геометріи, то Стифельсъ даетъ на это чрезвычайно много примѣровъ: особенно замѣчательны здѣсь всѣ предложенія 13-й книги Евклида, изслѣдованныя очень просто при помощи уравненій второй степени. Правда, сочиненіе это явилось черезъ полвѣка послѣ сочиненія Луки Бурго и можно бы было подумать, что указанныя нами различія представляютъ плоды развившихся за это время началъ, указанныхъ самимъ Лукою Бурго. Но сочиненіе Стифельса во всемъ, касающемся алгебраической части, есть только подражаніе сочиненіямъ двухъ другихъ нѣмецкихъ алгебраистовъ: Адама Ризена и Христофора Рудольфа, о которыхъ онъ часто, особенно во второй части, упоминаетъ съ большою похвалой. Въ 1522 году было уже напечатано по-нѣмецки сочиненіе послѣдняго изъ нихъ, подъ заглавіемъ: *Die Coss*; оно было переведено въ Италіи на латинскій языкъ, и переводъ этотъ до сихъ поръ существуетъ между рукописями королевской библіотеки (№ 7365, in—4°, въ числѣ латинскихъ рукописей) подъ заглавіемъ: *Arithmetica Christophori Rodolphi ab Jamer, e germanica lingua in latinam a Chris-*

---

[255]) См. Lib. III, cap. 6, подъ заглавіемъ: *De secundis radicibus*. Это первый примѣръ употребленія *буквъ* для означенія неизвѣстныхъ въ уравненіяхъ. Ему послѣдовали Пелетье въ своей *Algèbre* (1554) и Бутеонъ въ *Logistica* (1559). Въ высшей степени странно, что этою счастливою мыслью, столь очевидно облегчающей вычисленія, не воспользовались Карданъ и Тарталеа. Это одно изъ самыхъ разительныхъ доказательствъ силы привычки даже у возвышеннѣйшихъ умовъ.

[256]) *Sunt autem aequationes quaedam, quibus natura rerum hujus modi dedit habere duplicem radicem, videlicet majorem et minorem: id quod plane docebo atque demonstrabo.* (*Arithmetica integra*, fol. 243). Ниже авторъ прибавляетъ, что уравненіе не можетъ имѣть болѣе двухъ корней: *plures autem duabus nulla aequatio habebit*, fol. 244.

tophoro Auvero, Petri Danesii mandato, Romae anno Christi 1540 conversa.

Мы нашли въ этомъ сочиненіи замѣчательное развитіе алгебры и приложеній ея къ геометріи, указанное нами въ сочиненіи Стифельса. Въ нѣсколькихъ небольшихъ сочиненіяхъ по ариѳметикѣ, вышедшихъ въ Германіи въ первые годы 16-го столѣтія, находятся также примѣры приложенія правилъ исчисленія къ геометрическимъ задачамъ; такъ въ *Algorithmus de integris et minutiis* (Leipzig, 1507) прилагается фальшивое правило (regula falsi) къ слѣдующей задачѣ: по данному катету и суммѣ двухъ другихъ сторонъ прямоугольнаго треугольника опредѣлить эти стороны. Припомнимъ наконецъ, что уже въ 15-мъ столѣтіи Регіомонтанъ и астрономъ Бланкинъ были очень искусны въ употребленіи алгебраическихъ правилъ и что первый изъ нихъ, въ сочиненіи *De triangulis*, примѣнялъ ихъ къ рѣшенію геометрическихъ задачъ.

Поэтому мы можемъ, кажется, съ достовѣрностію сказать, что алгебра съ самаго начала возрожденія наукъ въ Европѣ развилась и въ особенности прилагалась къ задачамъ геометріи, и что характеръ математики 16-го столѣтія, заключающійся въ тѣсномъ сближеніи алгебры съ геометріей, высказался еще прежде появленія сочиненія Луки Бурго, которое, распространившись прежде всѣхъ путемъ печати, имѣло наибольшее вліяніе на успѣхи математики и на принятое ею новое направленіе.

Границы нашего сочиненія, изъ которыхъ мы уже далеко вышли, не дозволяютъ намъ предложить здѣсь разборъ трудовъ Кардана, Тарталеа, Бенедиктиса [257]) и нѣкоторыхъ дру-

---

[257]) Т. В. Benedictis въ своемъ сочиненіи *Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber;* Taurini, 1585, in fol. постоянно прилагаетъ геометрическія соображенія для доказательства и повѣрки правилъ ариѳметики и алгебры. Вотъ превосходный примѣръ такого пріема. Авторъ предлагаетъ себѣ задачу, выражаемую тремя уравненіями съ тремя неизвѣстными: $x+y=a$, $y+z=b$, $z+x=c$. Онъ рѣшаетъ ее алгебраически и чтобы повѣрить найденныя для неизвѣстныхъ вы-

гихъ геометровъ 16-го вѣка, трудовъ, по которымъ мы охотно изыскали бы и прослѣдили путь математики,

---

раженія, употребляетъ слѣдующія геометрическія соображенія: *Составимъ треугольникъ, стороны котораго были бы равны числамъ a, b и c, и впишемъ въ него кругъ, касающійся трехъ сторонъ; тогда отрѣзки, опредѣляемые на сторонахъ точками прикосновенія, будутъ представлять величины трехъ неизвѣстныхъ x, y и z*; отсюда онъ прямо заключаетъ, что величины неизвѣстныхъ будутъ $x=\frac{a+c-b}{2}$ и т. д. согласно съ тѣмъ, что̀ даетъ вычисленіе (См. р. 82).

Бенедиктисъ строитъ геометрически, какъ это дѣлается и теперь, положительный корень уравненія $x^2+ax=b^2$. Правда, онъ не прямо предлагаетъ себѣ это уравненіе, но замѣняетъ его слѣдующею задачей, которая рѣшается этимъ уравненіемъ: *по двумъ даннымъ линіямъ a и b найти третью x, такъ чтобы было* $(x+a)\,x=b^2$ (р. 386). Это можетъ быть первый примѣръ геометрическаго построенія уравненія второй степени; ибо, хотя задачи, рѣшенныя Евклидомъ (Prop. 28 и 29 шестой книги элементовъ и 84, 85, 86 и 87 *Data*), будучи выражены алгебраически, ведутъ окончательно къ уравненіямъ второй степени, но отъ задачъ алгебраическихъ онѣ существенно отличаются своимъ геометрическимъ изложеніемъ.

Въ сочиненіяхъ Кардана и Тарталеа, которыя стоятъ несравненно выше сочиненія Бенедиктиса, также постоянно алгебра употребляется въ геометріи и геометрія въ алгебрѣ. Принципъ тѣсной связи этихъ двухъ наукъ высказанъ такъ рѣшительно и примѣры такъ многочисленны, что намъ нѣтъ надобности останавливаться долѣе на этомъ предметѣ.

Тарталеа, кромѣ алгебраическаго отдѣла, составляющаго шестую часть сочиненія его *Tractatus generalis de numeris et mensuris*, написалъ еще другое сочиненіе по алгебрѣ, подъ названіемъ: *Algebra nova*, но оно не было выпущено въ свѣтъ и объ утратѣ его нельзя не жалѣть. Въ пятой части *Tractatus generalis* (fol. 88) Тарталеа даетъ рѣшеніе одной задачи о *maximum*, доказательство котораго должно было находиться въ этомъ сочиненіи объ алгебрѣ. Задача для того времени весьма замѣчательна: требуется число 8 раздѣлить на двѣ такія части, чтобы произведеніе ихъ, умноженное на разность, было *maximum*. Рѣшеніе Тарталеа совершенно общее и то же самое, какое даютъ правила современнаго исчисленія безконечно-малыхъ. *Возьми*, говоритъ онъ, *квадратъ 8, составь третью часть этого квадрата и изъ нея извлеки квадратный корень: это будетъ разность между двумя искомыми числами*. Выборъ за неизвѣстное разности двухъ частей даннаго числа очень удаченъ и показываетъ глубокое знаніе науки.

весьма отличавшейся въ то время по своей формѣ отъ геометріи Грековъ, указали бы ея успѣхи до того времени, когда Вьетъ въ своихъ сочиненіяхъ предпринялъ новое, въ высшей степени удачное преобразованіе ея, которое было необходимо для того, чтобы геометрія могла во всемъ объемѣ воспользоваться опорою, доставляемою ей наукой исчисленія.

Но мы должны еще точнѣе опредѣлить эту новую форму, принятую геометріей, такъ какъ въ ней именно заключается неизмѣримое различіе между сочиненіями 17-го и 16-го столѣтій, и изъ нея проистекли значительные успѣхи, сдѣланные послѣ того наукою.

Геометрія 16-го вѣка существенно отличается отъ геометріи Грековъ въ одномъ отношеніи, именно въ томъ, что она имѣетъ дѣло только съ числовыми данными, какъ мы уже сказали это при разборѣ сочиненія Луки Бурго. Это было естественнымъ слѣдствіемъ тѣснаго сближенія этой науки съ алгеброй, сближенія, которое только при числовыхъ данныхъ и было возможно, такъ какъ алгебра того времени была не что иное, какъ высшая и исключительно числовая ариѳметика, отличавшаяся существенно отъ обыкновенной ариѳметики только употребленіемъ правила знаковъ и механизма уравненій; она не была еще наукою отвлеченныхъ символовъ, какою представилъ ее Вьетъ подъ именемъ *Logistica speciosa*. Дѣйствія и обороты исчисленія, упрощавшіе доказательства и замѣнившіе собою геометрическія соображенія, которыя исключительно употреблялись всѣми греческими геометрами, возможны были слѣдовательно въ 16-мъ столѣтіи только при изложеніи геометріи помощію числовыхъ примѣровъ. Такъ это и было дѣйствительно до Вьета, судя по всѣмъ сочиненіямъ этого въ высшей степени замѣчательнаго періода въ исторіи науки. Но геометрія при этомъ потеряла очевидно чистоту формы и въ то же время характеръ общности и отвлеченности, чего древніе такъ строго держались и что, кажется, такъ свойственно этой наукѣ. И если это въ нѣко-

торыхъ отношеніяхъ представляло выгоды, то имѣло также и весьма вредныя послѣдствія, такъ какъ умъ, дѣйствовавшій надъ числами, терялъ съ одной стороны изъ виду предметы, ими представляемые, съ другой же стороны, съ введеніемъ вычисленій онъ терялъ путь и главную нить размышленія. Поэтому-то такъ трудно читать геометрическія доказательства въ сочиненіяхъ 16-го столѣтія.

Геометрія Грековъ потерпѣла такимъ образомъ дѣйствительное ухудшеніе, но ухудшеніе весьма счастливое, такъ какъ Вьетъ долженъ былъ получить ее именно въ подобномъ состояніи, чтобы примѣнить къ ней свою великую идею буквенной алгебры и тѣмъ возстановить ее во всей первоначальной чистотѣ и отвлеченности, не лишая въ то же время нисколько выгодъ, доставляемыхъ исчисленіями. Но удивительно, что для достиженія этого великаго результата, этого усовершенствованія греческой геометріи, необходимо было пройти чрезъ состояніе упадка, лишившее эту науку ея характера отвлеченности и общности и поставившее ее на одномъ ряду съ конкретными и числовыми операціями.

Эти соображенія позволяютъ намъ разсматривать 15-е и 16-е столѣтія въ исторіи геометріи, какъ подготовительную и переходную эпоху, въ теченіе которой вырабатывалась новая форма математики; и мы должны прибавить, что Индѣйцы и Арабы имѣли значительную долю участія въ этомъ преобразованіи и улучшеніи, такъ какъ зародышъ всего этого лежитъ въ ихъ принципѣ приложенія алгебры къ геометріи, принципѣ, который сами они развивали въ своихъ сочиненіяхъ въ продолженіе четырехъ столѣтій.

ПРИМѢЧАНІЕ XIII.

(Вторая эпоха, n^0 18.)

О сочиненіи Conica Паскаля.

Бо́льшая часть біографическихъ замѣтокъ заключаютъ въ себѣ ошибочныя свѣдѣнія о сочиненіи *Conica* Паскаля

Въ однихъ—этотъ большой трактатъ о коническихъ сѣченіяхъ, который никогда не былъ изданъ, смѣшивается съ сочиненіемъ: *Essai sur les coniques*, единственнымъ сочиненіемъ, которое было извѣстно Декарту; въ другихъ—считается справедливымъ, будто бы знаменитый философъ не хотѣлъ признавать Паскаля авторомъ *Essai* и приписывалъ это сочиненіе сперва Дезаргу, а потомъ отцу Паскаля, который былъ также глубоко свѣдущъ въ математикѣ. Хотя Байль (Bayle) въ своемъ историческомъ словарѣ опровергалъ такое толкованіе мнѣнія Декарта на томъ основаніи, что оно противорѣчитъ оставшимся документамъ и, можно сказать, также характеру великаго философа, который почти никогда ничему не удивлялся; однако это толкованіе часто воспроизводилось впослѣдствіи; напримѣръ, у Монтуклы въ *Histoire des Mathématiques* (t. II, p. 62).

Еще въ самое недавнее время одинъ весьма ученый геометръ считалъ справедливымъ приписать Дезаргу по крайней мѣрѣ теорему о шестиугольникѣ; между тѣмъ Паскаль предлагаетъ ее въ началѣ *Essai*, какъ свое собственное изобрѣтеніе, служащее основаніемъ всему сочиненію, и вслѣдъ за тѣмъ не забываетъ назвать Дезарга авторомъ другой, тутъ же изложенной теоремы.

Къ этому доказательству, котораго совершенно достаточно, чтобы признать за Паскалемъ первенство въ открытіи его знаменитой теоремы, мы можемъ прибавить свидѣтельство самого Дезарга. Это одно мѣсто изъ сочиненія этого геометра, 1642 года, приводимое Кюрабеллемъ въ *Examen des oeuvres de Desargues* (in—4°, 1644). Говоря объ одномъ предложеніи (которое не указано Кюрабеллемъ) Дезаргъ прибавляетъ, что „онъ дастъ ключъ къ нему, когда будетъ публиковано доказательство великаго предложенія, называемаго Паскалевымъ, и что упомянутый Паскаль можетъ сказать, что четыре первыя книги Аполлонія суть или случаи, или непосредственныя слѣдствія этого великаго предложенія.“ Нельзя сомнѣваться, что здѣсь идетъ рѣчь о теоремѣ о

шестиугольникѣ, которую Паскаль изложилъ въ началѣ своего *Essai*, какъ лемму, на которой будетъ основываться весь его трактатъ о коническихъ сѣченіяхъ. Изъ этого любопытнаго отрывка видно также, что въ то время эта удивительная теорема носила уже, какъ и теперь, имя Паскаля.

ПРИМѢЧАНІЕ XIV.

(Вторая эпоха, n^0 n^0 23 и 31.)

О сочиненіяхъ Дезарга; письмо Бограна и Examen Кюрабелля.

Мы сослались на письмо Бограна о *Brouillon projet des coniques* Дезарга, основываясь на томъ, что̀ сказано объ этомъ у Понселе въ *Traité des propriétés projectives*, стр. 95; самое же письмо чрезвычайно рѣдко и мы не могли его достать.

Въ *Examen des oeuvres du sieur Desargues*, par J. Curabelle (in—4°, 1644), сочиненіи также весьма рѣдкомъ, мы нашли мѣсто, въ которомъ также упоминается объ этомъ письмѣ и которое интересно еще въ другихъ отношеніяхъ. Кюрабелль приводитъ мнѣніе, высказанное Дезаргомъ въ 1642 году по поводу предложенія Паскаля (вѣроятно о шестиугольникѣ) и состоящее въ томъ, что *четыре первыя книги Аполлонія суть или случаи, или непосредственныя слѣдствія* этого предложенія; и потомъ прибавляетъ: „Mais quant „à l'égard du sieur Desargues, cet abaissement d'Apollonius „ne relève pas *ses leçons de ténèbres, ni ses événemens aux* „*atteintes que fait un cône rencontrant un plan droit*, auquel „a suffisamment répondu le sieur de Beaugrand, et démontré „les erreurs en l'année 1639, et imprimé en 1642, en telle „sorte que le public, depuis ledit temps, est privé desdites leçons de ténèbres, qui étaient tellement relevées, au dire „dudit sieur, qu'elles surpassaient de beaucoup les oeuvres

„d'Apollonius, ainsi qu'on pourra voir dans la lettre **dudit** „sieur de Beaugrand, imprimée l'année ci-dessus."

Это мѣсто наводитъ на слѣдующія соображенія:

Прежде всего, изъ него, кажется слѣдуетъ, что кромѣ *Brouillon projet d'une atteinte aux événemens des rencontres du cône avec un plan* Дезаргъ написалъ другое сочиненіе о коническихъ сѣченіяхъ подъ заглавіемъ: *Lecons de ténèbres*; это же можно предполагать изъ нѣсколькихъ мѣстъ сочиненія гравера и живописца Grégoire Huret: *Optique de portraiture et peinture, contenant la perspective et pratique accomplie*, etc. Paris 1670, in-folio.

Намъ казалось сначала, что слова *et imprimé en 1642* относятся къ тому, что̀ было *demontré en 1639*, и изъ этого мы заключали, что письмо Бограна было напечатано только въ 1642 году; но мы нашли, что это же письмо упомянуто въ другомъ сочиненіи Кюрабелля противъ Дезарга, о чемъ сейчасъ будемъ говорить, и въ немъ сказано, что письмо это напечатано въ 1639 году.

Мы думаемъ поэтому, что слова *et imprimé en 1642* означаютъ, что Бограпъ, кромѣ перваго письма, написалъ и напечаталъ въ 1642 году еще другое письмо противъ Дезарга; можетъ быть по поводу его *Leçons de ténèbres*, упоминаемыхъ Кюрабеллемъ и Гюре.

Дѣйствительно, по всему видно, что Бограпъ не пропускалъ случая высказаться противникомъ Дезарга: мы нашли, что онъ написалъ еще *Lettre sur le Brouillon projet de la coupe des pierres de Desargues* (1640, in—°4). Это письмо отмѣчено съ такимъ заглавіемъ въ каталогѣ королевской библіотеки, подъ именами Бограна и Дезарга; но къ сожалѣнію самаго письма нѣтъ болѣе въ библіотекѣ. Оно входило въ составъ особаго тома, объ утратѣ котораго нельзя не сожалѣть, потому что въ немъ находились еще другія статьи о сочиненіяхъ Дезарга, явившихся въ 1642 году [258]).

---

[253]) Понселе въ *Traité des propriétés projectives* говоритъ, что письмо Бограна о *Brouillon projet des coniques* Дезарга существуетъ въ коро-

Examen Кюрабелля возбудилъ оживленные споры между нимъ и Дезаргомъ; объ этомъ мы узнаемъ изъ другаго сочиненія, подъ заглавіемъ: *Faiblesse pitoyable du sieur Desargues, employée contre l'examen fait de ses oeuvres*, par J. Curabelle. Изъ этого сочиненія видимъ, что Дезаргъ, желая поддержать достоинство своего ученія объ обдѣлкѣ камней, предложилъ закладъ во сто тысячъ ливровъ; но Кюрабелль принялъ споръ объ закладъ только во сто пистолей. Статьи условія по этому дѣлу были обсуждаемы 2-го марта 1644 года; но трудно было согласиться относительно нѣкоторыхъ пунктовъ и это вызвало появленіе разныхъ небольшихъ книжекъ съ той и другой стороны; наконецъ дѣло было передано въ парламентъ 12-го мая того же года. Оно находилось въ этомъ положеніи, когда Кюрабелль напечаталъ сочиненіе, которое знакомитъ насъ съ этими подробностями [259]).

Трудность соглашенія заключалось главнымъ образомъ въ выборѣ присяжныхъ цѣнителей. Изъ слѣдующаго мѣста видно, въ чемъ состояло направленіе, которому слѣдовалъ Дезаргъ въ своихъ сочиненіяхъ объ отдѣлкѣ камней, а также и направленіе его критиковъ и противниковъ; въ этомъ скрывалось, можно сказать, начало и самая сущность спора.

Дезаргъ хотѣлъ „*s'en rapporter au dire d'excellens géomètres* „*et autres personnes savantes et desinteressées, et en tant* „*qu'il serait de besoin aussi, des jurés maçons de Paris.*" „Кюрабелль на это отвѣчалъ: „ce qui fait voir évidemment que „ledit Desargues n'a aucune vérité à déduire qui soit soutenable, „puisqu'il ne veut pas des vrais experts pour les matières en „conteste; il ne demande „que des gens de sa cabale, comme

---

левской библіотекѣ; но оно не входитъ въ составъ этого тома и я не могъ найти его ни подъ какимъ заглавіемъ.

[259]) Я имѣю только восемь первыхъ страницъ этого сочиненія in—4°, которыя я нашелъ присоединенными къ моему тому *Examen des oeuvres de Desargues.* Желалъ бы знать и продолженіе, но нигдѣ не могъ найти другаго экземпляра.

„des purs géomètres lesquels n'ont jamais eu aucune expérience „des règles des pratiques en question, et notamment de la coupe des pierres en l'architecture qui est la plus grande partie des oeuvres de question, et partant ils ne peuvent parler des subjections que les divers cas enseignent."

Это мѣсто, мнѣ кажется, совершенно опредѣляетъ характеръ спора и *a priori* рѣшаетъ вопросъ между Дезаргомъ и его порицателями.

Что касается до самаго способа Дезарга, то онъ впослѣдствіи былъ признанъ хорошимъ и точнымъ, и отличающій его характеръ общности былъ оцѣненъ надлежащимъ образомъ. Мы не можемъ входить въ дальнѣйшія подробности объ этомъ предметѣ и ограничимся указаніемъ на мнѣніе, высказанное ученымъ Фрезье въ его *Traité de la coupe des pierres*. Деларю говоритъ, что *Кюрабелль въ точности обнаружилъ всѣ ошибки Дезарга* (въ построеніи прямыхъ и косыхъ сводовъ); приводя эти слова, Фрезье прибавляетъ: „я не видалъ этой критики и потому не могу судить о ея точности, но могу смѣло сказать, что способомъ Дезарга вовсе „не слѣдуетъ пренебрегать. Я согласенъ, что въ немъ есть „затрудненія, но они происходятъ отъ недостаточнаго разъ„ясненія основнаго начала, а также отчасти отъ новизны „терминовъ, и потому я хочу пополнить, и т. д." (Томъ II, стр. 208, изданіе 1768 г.). Потомъ, при изложеніи самаго способа, Фрезье говоритъ, что Дезаргъ „привелъ всѣ „построенія.... къ одной задачѣ, именно къ опредѣленію „угла наклоненія оси цилиндра къ діаметру основанія, и „пр." (стр. 209).

Наконецъ, изложивъ ясно и со всею общностью способъ Дезарга, Фрезье заключаетъ, что этотъ способъ *„остроуменъ и принесъ бы честь"* Дезаргу, еслибы Боссъ изложилъ его болѣе понятнымъ образомъ.

Кюрабелль, какъ писатель, совершенно неизвѣстенъ въ наше время; но, кажется, онъ писалъ о стереотоміи и о разныхъ частяхъ строительнаго искусства. По крайней мѣрѣ

извлеченіе изъ привилегіи, помѣщенное въ началѣ его *Examen*, содержитъ заглавія многихъ сочиненій, которыя онъ долженъ былъ издать впослѣдствіи. Однако мы не нашли никакого слѣда этихъ сочиненій, ни даже подтвержденія, что они когда-нибудь дѣйствительно были изданы. Деларю въ своемъ *Traité de la coupe des pierres* часто ссылается на Кюрабелля, но всегда только по поводу его *Examen*.

Дезаргъ, желая подчинить практическую перспективу и строительное искусство раціональнымъ геометрическимъ началамъ, пріобрѣлъ себѣ многихъ противниковъ, кромѣ Кюрабелля, какъ это видно изъ сочиненій знаменитаго гравера Босса, который всю жизнь свою провелъ въ борьбѣ съ ними. Эта настойчивость, дѣлающая честь характеру и убѣжденіямъ Босса, навлекла преслѣдованія и на него самого: ему запрещено было излагать ученіе Дезарга въ Королевской Академіи живописи, гдѣ онъ преподавалъ перспективу.

Изъ всѣхъ порицателей Дезарга самымъ аначительнымъ лицомъ былъ, кажется, Богранъ, королевскій секретарь, который находился въ сиошеніяхъ со многими людьми, извѣстными въ наукѣ; онъ самъ долженъ былъ имѣть свѣдѣнія въ математикѣ, потому что имъ издано сочиненіе подъ заглавіемъ: *In isagogem F. Vietae Scholia*, in—24, 1631, которое есть комментарій къ главному аналитическому сочиненію Вьета; нѣкоторую роль онъ игралъ также въ исторіи циклоиды. Но въ его геостатикѣ, о которой такъ много говорится въ письмахъ Декарта, доказывается *геометрически*, что вѣсъ тяжелаго тѣла становится тѣмъ меньше, чѣмъ оно ближе къ землѣ,—этого достаточно, чтобы видѣть, къ какимъ заблужденіямъ былъ способенъ его умъ, и нечего удивляться, что онъ дурно цѣнилъ произведенія Дезарга.

Уваженіе, котораго заслуживаетъ Дезаргъ, до сихъ поръ очень мало извѣстный біографамъ, побудило насъ войти въ

эти подробности, которыя, мы надѣемся, могутъ возбудить любопытство и вызвать кого-нибудь на отысканіе оригинальныхъ сочиненій этого геніальнаго человѣка и также статей, относящихся къ его ученымъ спорамъ. Переписка его съ знаменитѣйшими людьми того времени, трудившимися съ нимъ на одномъ поприщѣ и всегда желавшими видѣть его судьею своихъ сочиненій, была бы также драгоцѣннымъ открытіемъ для исторіи литературы семнадцатаго вѣка, доставившаго столько славы уму человѣческому.

Что касается до сочиненій Дезарга, то вотъ нѣкоторыя указанія, которыя вызовутъ, можетъ быть, еще другія, мнѣ неизвѣстныя:

Въ 1665 году Боссъ въ *Pratiques géometrales etc.* писалъ, что „покойный M. Millon, ученый геометръ, составилъ изъ „доказательствъ Дезарга большую рукопись, которую стои„ло бы напечатать.“

Въ *Histoire litteraire de la ville de Lyon*, par P. Colonia, напечатанной въ 1728 году, читаемъ: „Публикѣ будетъ „скоро предложено полное изданіе сочиненій Дезарга. Г. „Рише, каноникъ въ Provins, авторъ двухъ любопытныхъ и „подробныхъ мемуаровъ о сочиненіяхъ своего друга г. де„Ланьи и о сочиненіяхъ Дезарга, будетъ издателемъ этого „важнаго труда, которымъ особенно интересуется городъ „Ліонъ.“

Можетъ быть счастливый случай поведетъ къ открытію рукописи Мильона и матеріаловъ, собранныхъ для предпріятія Рише (Richer).

ПРИМѢЧАНІЕ XV.

(*Вторая эпоха*; *n° 26*).

Объ ангармоническомъ свойствѣ точекъ коническаго сѣченія. Доказательство самыхъ общихъ свойствъ этихъ кривыхъ.

---

1. Подобно тому, какъ въ теоремѣ Дезарга объ инволюціи шести точекъ, представимъ себѣ четыреугольникъ, вписанный въ коническое сѣченіе, и какую-нибудь сѣкущую.

Изъ двухъ противоположныхъ вершинъ четыреугольника проведемъ прямыя къ двумъ точкамъ, въ которыхъ сѣкущая встрѣчается съ коническимъ сѣченіемъ; каждая изъ этихъ вершинъ будетъ точкою, изъ которой выходятъ четыре прямыя. Легко видѣть, что инволюціонное соотношеніе Дезарга выражаетъ собою равенство между *ангармоническимъ* отношеніемъ четырехъ точекъ пересѣченія сѣкущей съ четырьмя прямыми, выходящими изъ одной вершины четыреугольника, и ангармоническимъ отношеніемъ четырехъ точекъ пересѣченія той же сѣкущей съ четырьмя прямыми, выходящими изъ противоположной вершины четыреугольника; отсюда мы заключаемъ, что *ангармоническое отношеніе первыхъ четырехъ прямыхъ равно ангармоническому отношенію четырехъ другихъ*.

2. Итакъ мы имѣемъ слѣдующую общую теорему, взаимную тому заключенію, которое мы вывели изъ теоремы Дезарга:

Когда два пучка изъ четырехъ прямыхъ соотвѣтствуютъ другъ другу такъ, что ангармоническое отношеніе четырехъ первыхъ прямыхъ равно ангармоническому отношенію четырехъ другихъ, то прямыя одного пучка встрѣчаются съ соотвѣтственными прямыми другаго въ четырехъ точкахъ, лежащихъ на коническомъ сѣченіи, проходящемъ еще черезъ двѣ точки, именно черезъ центры обоихъ пучковъ.

Эта теорема, какъ видно изъ предложеннаго нами здѣсь доказательства ея, въ сущности есть только другое выраженіе теоремы Дезарга; но ея слѣдствія, чрезвычайно многочисленныя, обнимаютъ часть такихъ свойствъ коническихъ сѣченій, на которыя, кажется, не распространяются теоремы Дезарга и Паскаля. Дѣйствительно, кромѣ преимущества своей особой формы, эта теорема имѣетъ нѣчто болѣе общее, чѣмъ тѣ двѣ теоремы, которыя поэтому получаются изъ нея уже не какъ видоизмѣненія ея, но какъ ея слѣдствія. Мы сейчасъ подтвердимъ это, указывая на приложенія, къ которымъ способна эта теорема.

Но прежде дадимъ прямое доказательство ея, такъ какъ мы ею хотимъ замѣнить самыя общія изъ употреблявшихся до сихъ поръ теоремъ и вывести ихъ всѣ изъ нея же.

3. Доказательство это до крайности легко и просто. Такъ какъ теорема выражаетъ равенство *ангармоническихъ отношеній* въ двухъ пучкахъ четырехъ линій, и такъ какъ эти отношенія сохраняютъ свою величину въ перспективѣ, то достаточно доказать, что равенство существуетъ въ кругѣ, служащемъ основаніемъ того конуса, на которомъ разсматривается коническое сѣченіе. Но въ кругѣ углы между линіями перваго пучка соотвѣтственно равны угламъ между соотвѣтствующими линіями втораго пучка, потому что эти углы опираются на тѣ же дуги; такъ какъ синусы ихъ также равны между собою, то ангармоническое отношеніе синусовъ угловъ перваго пучка равно ангармоническому отношенію синусовъ угловъ втораго пучка.

Такимъ образомъ теорема доказана.

4. Представимъ себѣ, что три прямыя перваго пучка и три соотвѣтствующія прямыя втораго —неподвижны; что четвертая прямая перваго пучка вращается около своего центра и что соотвѣтствующая ей прямая втораго пучка также вращается и притомъ такимъ образомъ, что всегда сохраняется равенство ангармоническихъ отношеній въ обоихъ пучкахъ: *эти двѣ вращающіяся прямыя будутъ пересѣкаться всегда на коническомъ сѣченіи*, опредѣляемомъ пятью неподвижными точками фигуры, именно: центрами двухъ пучковъ и точками, въ которыхъ три неподвижныя прямыя перваго пучка пересѣкаются съ соотвѣтствующими имъ линіями втораго.

5. Отсюда проистекаетъ безчисленное множество способовъ образованія коническихъ сѣченій чрезъ пересѣченіе двухъ прямыхъ, вращающихся около двухъ неподвижныхъ точекъ. Потому что безконечно разнообразно можно составить два пучка прямыхъ, соотвѣтствующихъ одна другой и притомъ такъ, что ангармоническое отношеніе какихъ-

нибудь четырехъ прямыхъ перваго пучка всегда будетъ равно ангармоническому отношенію четырехъ прямыхъ во второмъ пучкѣ.

6. Напримѣръ, представимъ себѣ постоянный уголъ; пусть около данной точки, какъ около полюса, вращается прямая линія, которая во всякомъ положеніи будетъ встрѣчаться съ сторонами угла въ двухъ точкахъ. Четыре, опредѣленныя такимъ образомъ, точки на одной изъ сторонъ угла будутъ имѣть одинаковое ангармоническое отношеніе съ четырьмя соотвѣтствующими точками на другой сторонѣ (потому что оба эти отношенія равны ангармоническому отношенію четырехъ сѣкущихъ, служащихъ для опредѣленія этихъ точекъ). Отсюда слѣдуетъ, что, если мы соединимъ какую-нибудь неподвижную точку съ точками, отмѣченными на одной сторонѣ угла, и другую неподвижную точку—съ точками, отмѣченными на другой сторонѣ, то получимъ два пучка соотвѣтствующихъ прямыхъ, пересѣкающихся между собою на коническомъ сѣченіи, проходящемъ черезъ двѣ неподвижныя точки. Итакъ

Если три стороны треугольника, измѣняющаго свой видъ, вращаются около трехъ неподвижныхъ точекъ и двѣ вершины его перемѣщаются по двумъ неподвижнымъ прямымъ, то третья вершина описываетъ коническое сѣченіе, проходящее черезъ двѣ точки, около которыхъ вращаются стороны, прилежащія къ этой вершинѣ [260]).

---

260) Если бы сторона треугольника, противолежащая образующей вершинѣ, вмѣсто того, чтобы вращаться около неподвижной точки, скользила по коническому сѣченію, касающемуся двухъ неподвижныхъ прямыхъ, то свободная вершина треугольника описывала бы также коническое сѣченіе, проходящее черезъ двѣ неподвижныя точки.

Это слѣдуетъ изъ того, что четыре касательныя коническаго сѣченія пересѣкаютъ каждую изъ двухъ другихъ касательныхъ въ четырехъ точкахъ, которыя на той и на другой касательной имѣютъ одинаковое ангармоническое отношеніе (см. слѣдующее Примѣчаніе).

Это обобщеніе теоремы Маклорена и Брайкенриджа можетъ вести о множеству различныхъ, большею частію новыхъ, предложеній.

Эта теорема есть ничто иное, какъ мистическій шестиугольникъ Паскаля, только представленный въ иной формѣ. Теорема въ этомъ видѣ находится у Маклорена и Брайкенриджа; она именно и привела перваго изъ этихъ геометровъ къ изложенію теоремы Паскаля.

7. Разсмотримъ два пучка прямыхъ, выходящихъ изъ двухъ различныхъ центровъ и пересѣкающихся по-парно на одной прямой, взятой произвольно въ плоскости. Ангармоническое отношеніе какихъ-нибудь четырехъ прямыхъ перваго пучка равно ангармоническому отношенію четырехъ соотвѣтствующихъ линій во второмъ пучкѣ (оба равны именно ангармоническому отношенію четырехъ точекъ, въ которыхъ эти прямыя встрѣчаются съ постоянной прямой). Измѣнимъ теперь относительное положеніе пучковъ, перенеся ихъ на плоскости въ другія мѣста; соотвѣтствующія прямыя уже не будутъ пересѣкаться на одной прямой, но изъ нашей теоремы слѣдуетъ, что *онѣ будутъ пересѣкаться на коническомъ сѣченіи, проходящемъ черезъ вершины обоихъ пучковъ.*

8. Положимъ, что первоначальные пучки сохранили при перемѣщеніи свои прежніе центры, т.-е. что мы повернули ихъ около ихъ центровъ; тогда изложенная нами теорема обращается прямо въ теорему Ньютона объ органическомъ образованіи коническихъ сѣченій.

9. Если бы лучи первоначальныхъ пучковъ встрѣчались не на прямой линіи, а на коническомъ сѣченіи, проходящемъ чрезъ два центра ихъ, то пучки эти все-таки удовлетворяли бы условію равенства ангармоническихъ отношеній между четырьмя лучами одного и четырьмя соотвѣтствующими лучами другаго пучка (на основаніи теоремы n⁰ 2) Слѣдовательно и послѣ какого-нибудь перемѣщенія этихъ пучковъ соотвѣтствующіе лучи ихъ будутъ опять пересѣкаться на коническомъ сѣченіи.

10. Если пучки повернемъ только около ихъ центровъ то получится теорема:

Когда два какіе-нибудь постоянные угла вращаются около своихъ вершинъ такъ, что точка пересѣченія двухъ ихъ сторонъ описываетъ коническое сѣченіе, проходящее черезъ двѣ вершины, то двѣ другія стороны пересѣкаются въ точкахъ другаго коническаго сѣченія, также проходящаго черезъ вершины.

11. Эта теорема, представляющая обобщеніе теоремы Ньютона, сама представляетъ одинъ изъ безчисленнаго множества подобныхъ же частныхъ способовъ построенія коническихъ сѣченій чрезъ пересѣченіе двухъ прямыхъ, вращающихся около двухъ постоянныхъ точекъ или чрезъ пересѣченіе сторонъ угловъ, которые движутся около своихъ вершинъ; притомъ вмѣсто угловъ постоянной величины, которые мы брали сейчасъ, можно предполагать углы перемѣнные и при этомъ установить безконечно разнообразное соотношеніе между ихъ величинами.

Такъ напримѣръ, можно предполагать, что каждый изъ нихъ образуетъ на постоянной прямой отрѣзки постоянной величины.

Такимъ образомъ, теорема Ньютона, имѣвшая нѣкоторую знаменитость и казавшаяся основною въ теоріи коническихъ сѣченій, оказывается не болѣе, какъ весьма частнымъ случаемъ общаго способа образованія этихъ кривыхъ.

12. Это обстоятельство ведетъ, какъ намъ кажется, къ двумъ заключеніямъ. Оно показываетъ, вопервыхъ, что всегда полезно восходить къ начальному происхожденію геометрическихъ истинъ и съ этой возвышенной точки зрѣнія обозрѣвать и открывать разнообразныя формы, въ которыхъ онѣ могутъ представляться и которыя могутъ расширить ихъ приложенія; такъ, теорема Ньютона, которую многіе весьма замѣчательные геометры считали нужнымъ доказывать, какъ одну изъ лучшихъ теоремъ въ теоріи коническихъ сѣченій, не приводила однако къ важнымъ результатамъ, потому что форма ея удобна для полученія только немногихъ слѣдствій. Общая же теорема, изъ кото-

рой мы ее вывели, способна, напротивъ, ко множеству разнообразныхъ выводовъ.

Вовторыхъ, мы видимъ здѣсь доказательство той истины, что самыя общія и богатыя предложенія суть въ то же время самыя простыя и легче всего доказываются. Ни одно изъ извѣстныхъ доказательствъ теоремы Ньютона не можетъ сравниться по краткости съ доказательствомъ общей теоремы, которое дано нами въ *n*° 3; при этомъ послѣднее имѣетъ еще то преимущество, что въ немъ не требуется предварительнаго знанія никакихъ свойствъ коническихъ сѣченій.

13. Возьмемъ опять два пучка, пересѣкающіеся по прямой линіи, и предположимъ, что прямая эта находится въ безконечности; т.-е. что прямыя двухъ пучковъ соотвѣтственно параллельны между собою. Перемѣстимъ пучки, обращая ихъ около центровъ; соотвѣтствующія прямыя будутъ пересѣкаться на коническомъ сѣченіи, проходящемъ черезъ оба центра. Отсюда проистекаетъ такая теорема: *Если имѣемъ въ плоскости двѣ подобныя, но не подобно расположенныя, фигуры, то прямыя, проведенныя на первой фигурѣ черезъ произвольную точку, будутъ пересѣкаться на коническомъ сѣченіи съ соотвѣтствующими прямыми второй фигуры*. Теорему эту мы изложили уже безъ доказательства въ сочиненіи о перемѣщеніи твердаго тѣла въ пространствѣ (*Bulletin universel des sciences*, t. XIV, p. 321).

14. Общую теорему, составляющую предметъ этого Примѣчанія, можно изложить еще въ такомъ видѣ: *Если шестиугольникъ вписанъ въ коническое сѣченіе и изъ двухъ вершинъ его проведено по четыре прямыя въ четыре остальныя вершины, то ангармоническое отношеніе первыхъ четырехъ прямыхъ равно ангармоническому отношенію четырехъ другихъ*.

Т.-е. *Четыре первыя прямыя встрѣчаются съ какою-нибудь сѣкущею въ четырехъ точкахъ, четыре другія съ дру-*

гою произвольною сѣкущей—въ четырехъ соотвѣтствующихъ точкахъ: ангармоническое отношеніе первыхъ четырехъ точекъ равно ангармоническому отношенію четырехъ другихъ.

Въ этомъ изложеніи теорема представляетъ весьма большую общность по причинѣ неопредѣленнаго положенія двухъ сѣкущихъ.

15. Положимъ, что первая сѣкущая есть одна изъ прямыхъ, проведенныхъ черезъ вторую вершину шестиугольника, а вторая сѣкущая—одна изъ прямыхъ, проведенныхъ черезъ первую вершину; получаемая при этомъ теорема будетъ именно первая изъ теоремъ, изложенныхъ Паскалемъ въ *Essai pour les coniques* и выведенныхъ имъ изъ его шестиугольника.

16. Положимъ далѣе, что обѣ сѣкущія совпадаютъ съ одной изъ сторонъ шестиугольника;—получимъ теорему Дезарга объ инволюціи шести точекъ.

17. Если въ этой теоремѣ Дезарга замѣнимъ отрѣзки, заключающіеся на сѣкущей между двумя точками кривой и между четырьмя сторонами четыреугольника,—выраженіями ихъ въ функціи перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ двухъ точекъ коническаго сѣченія на четыре стороны, то получимъ теорему:

Если изъ какой-нибудь точки коническаго сѣченія опустимъ перпендикуляры на четыре стороны вписаннаго четыреугольника, то произведеніе перпендикуляровъ, опущенныхъ на двѣ противоположныя стороны будетъ имѣть постоянное отношеніе къ проивзеденію двухъ другихъ перпендикуляровъ, гдѣ бы ни была взята точка коническаго сѣченія.

Вмѣсто перпендикуляровъ можно взять наклонныя, образующія со сторонами четыреугольника, къ которымъ онѣ проводятся, равные углы. Это предложеніе есть ничто иное, какъ теорема *ad quatuor lineas*, приводимая Паппомъ.

18. И такъ мы доказали, что мистическій шестиугольникъ, другая теорема Паскаля также о шестиугольникѣ, теорема Ньютона объ органическомъ образованіи коническихъ сѣченій, теорема Дезарга объ инволюціи шести точекъ и теорема древнихъ *ad quatuor lineas* — всѣ суть слѣдствія нашей теоремы. Отсюда понятно, что эта теорема распространяется на множество частныхъ истинъ, указывая незамѣченныя до сихъ поръ соотношенія между ними и представляя для нихъ общее и достаточное основаніе.

Эту теорему можно, въ нѣкоторомъ смыслѣ, разсматривать, какъ *центръ*, изъ котораго проистекаетъ большая часть, даже самыхъ общихъ, предложеній; вслѣдствіе этого необыкновеннаго богатства и чрезвычайной простоты доказательства она могла бы служить основаніемъ геометрической теоріи коническихъ сѣченій.

19. Такъ какъ главный характеръ этой теоремы, дѣлающій ее способною къ безчисленному множеству выводовъ заключается въ понятіи объ *ангармоническомъ отношеніи*, то мы будемъ называть ее *ангармоническимъ свойствомъ* точекъ коническаго сѣченія [261]).

Замѣтимъ, что, если теоремы Паскаля, Дезарга, Ньютона и предложеніе *ad quatuor lineas* суть слѣдствія ангармоническаго свойства, то это послѣднее тѣмъ же путемъ можетъ въ свою очередь быть выведено изъ каждой изъ этихъ теоремъ и такимъ образомъ служить для перехода отъ одной изъ нихъ къ другой. Это доказываетъ, что понятіе объ *ангармоническомъ отношеніи* представляетъ дѣйствительно общую связь между этими различными теоремами, которыя поэтому отличаются другъ отъ друга только по формѣ.

Уже прежде было замѣчено соотношеніе, можно сказать почти тождество, между теоремами Дезарга и Паскаля, но не

---

[261]) Мы говоримъ *точекъ* коническаго сѣченія, потому что въ слѣдующемъ Примѣчаніи увидимъ, что коническія сѣченія обладаютъ еще другимъ *ангармоническимъ свойствомъ*, подобнымъ этому и относящимся къ ихъ *касательнымъ*.

между этими теоремами и другими важнѣйшими предложеніями, о которыхъ мы упомянули. Напротивъ, каждое изъ этихъ предложеній доказывалось совершенно особымъ образомъ и эти доказательства были всегда несравненно длиннѣе того очевиднаго доказательства, которое мы дали для общей теоремы.

20. Изъ этой же теоремы можно вывести прекрасное предложеніе Карно о соотношеніи между отрѣзками, образуемыми коническимъ сѣченіемъ на трехъ сторонахъ треугольника, взятаго въ той же плоскости,—предложеніе, которое выражаетъ такое же общее свойство шести точекъ коническаго сѣченія, какъ и теоремы Дезарга, Паскаля и Ньютона.

21. Наконецъ наше *ангармоническое свойство* можетъ быть представлено еще въ другой формѣ, въ которой оно является новымъ предложеніемъ, отличающимся отъ всѣхъ предыдущихъ и способнымъ къ новому роду чрезвычайно многочисленныхъ выводовъ.

Это новое предложеніе представляется въ видѣ трехчленнаго уравненія; его можно изложить такъ:

На плоскости даны двѣ сѣкущія; возьмемъ на первой изъ нихъ двѣ какія-нибудь точки O, E и на второй двѣ также какія-нибудь точки O', E'.

Если около неподвижныхъ полюсовъ P, P', взятыхъ произвольно въ плоскости чертежа, будемъ обращать двѣ прямыя, встрѣчающіяся съ двумя сѣкущими соотвѣтственно въ точкахъ a, a', опредѣляемыхъ такъ, что всегда существуетъ соотношеніе

$$\frac{Oa}{Ea} + \lambda \frac{O'a'}{E'a'} = \mu, \qquad (A)$$

гдѣ λ и μ—постоянныя.

То точка пересѣченія двухъ движущихся прямыхъ будетъ описывать коническое сѣченіе, проходящее черезъ оба полюса P, P'.

22. Эта теорема, въ которой такъ много произвольныхъ элементовъ, именно: направленіе сѣкущихъ, положеніе на нихъ четырехъ точекъ, положеніе двухъ полюсовъ и величина двухъ коэффиціентовъ, — въ сущности не отличается отъ тѣхъ общихъ свойствъ коническихъ сѣченій, о которыхъ говорилось въ этомъ Примѣчаніи; потому что, какъ и каждое изъ нихъ, она выводится изъ нашего ангармоническаго свойства. Но особая форма ея даетъ возможность распространить ея приложенія гораздо далѣе, чѣмъ это сдѣлано для другихъ предложеній.

23. Такъ напримѣръ, если предположимъ, что точки E, E' помѣщены на линіи, соединяющей полюсы P P', то уравненіе будетъ выражать уже не коническое сѣченіе, а просто прямую линію. Отсюда будутъ проистекать, какъ слѣдствія безчисленнаго множества свойствъ коническихъ сѣченій, безчисленныя же свойства прямой линіи; между ними будутъ находиться различныя системы координатъ и въ томъ числѣ, какъ частный случай, система Декарта.

Есть много другихъ способовъ выражать этимъ уравненіемъ прямую линію. Для этого вообще достаточно удовлетворить условію между данными вопроса, выражаемому уравненіемъ

$$\frac{O\varepsilon}{E\varepsilon} + \lambda \frac{O'\varepsilon'}{E'\varepsilon'} = \mu,$$

гдѣ ε, ε' суть точки пересѣченія двухъ сѣкущихъ съ прямою, соединяющею полюсы P, P'.

Въ другомъ сочиненіи мы покажемъ многочисленныя приложенія, къ которымъ, кажется, способно уравненіе (A) въ теоріи коническихъ сѣченій и въ теоріи трансверсалей.

24. Я возвращусь также въ другомъ мѣстѣ къ ангармоническому свойству коническихъ сѣченій, выражаемому въ видѣ равенства двухъ членовъ въ теоремѣ n^0 2; оно представится намъ въ теоріи *гомографическихъ* фигуръ, въ которыхъ оно является главнымъ свойствомъ. Тогда мы выразимъ его такими словами:

Въ двухъ гомографическихъ пучкахъ, находящихся въ одной плоскости, прямыя одного пучка пересѣкаются съ соотвѣтственными прямыми другаго въ точкахъ коническаго сѣченія, проходящаго черезъ центры обоихъ пучковъ.

Въ этомъ изложеніи идея *ангармоническаго отношенія*, сама по себѣ уже весьма простая, но относящаяся прямо только къ пучку изъ четырехъ прямыхъ, замѣняется другимъ понятіемъ, въ которомъ подразумѣваются всѣ прямыя пучка; это вноситъ еще болѣе быстроты и легкости въ приложенія теоремы.

25. Намъ, быть можетъ, извинятъ продолжительность этого Примѣчанія, если обратятъ вниманіе на то, что въ немъ изложены, вмѣстѣ съ доказательствами, почти всѣ самыя изящныя и общія свойства изъ теоріи коническихъ сѣченій. Анализъ, въ этомъ случаѣ, навѣрно не могъ бы быть такъ кратокъ и простъ, какъ чистая геометрія.

Замѣтимъ по этому поводу, что ни одно изъ этихъ предложеній, которыя однако суть самыя важныя и богатыя въ теоріи коническихъ сѣченій, не вводится теперь въ аналитическихъ сочиненіяхъ, имѣющихъ предметомъ изученіе этихъ кривыхъ. Такія сочиненія совсѣмъ не представляютъ трактатовъ о коническихъ сѣченіяхъ; это приложеніе аналитической геометріи и введеніе въ общую теорію кривыхъ линій; и въ приложеніяхъ этихъ доказываются не самыя общія и важныя свойства коническихъ сѣченій, но только самыя элементарныя и ограниченныя, потому что они легче выражаются формулами анализа. Другія свойства, которыя были бы гораздо полезнѣе и на которыхъ основывается непрестанное развитіе теоріи коническихъ сѣченій, остаются неизвѣстны для молодыхъ геометровъ, изучающихъ эту важную теорію только по руководствамъ аналитической геометріи.

Такимъ образомъ изученіе коническихъ сѣченій чрезвычайно отстало уже около столѣтія. Это весьма жалко; не только потому, что эти знаменитыя кривыя играютъ весьма

важную роль во всѣхъ частяхъ геометріи, вслѣдствіе чего знаніе ихъ рѣшительно необходимо; но также и на основаніи того общаго положенія, что во всѣхъ понятіяхъ надобно пріучать умъ направлять свои соображенія къ самымъ общимъ истинамъ каждой теоріи. Это самый вѣрный, если не единственный, способъ упростить изученіе науки и упрочить ея развитіе.

ПРИМѢЧАНІЕ XVI.

(*Продолженіе предыдущаго*).

Объ ангармоническомъ свойствѣ касательныхъ коническаго сѣченія.

Теоремы, о которыхъ говорилось въ предыдущемъ Примѣчаніи, относятся къ *точкамъ* коническаго сѣченія. Извѣстно, что многимъ изъ этихъ теоремъ соотвѣтствуютъ подобныя же относительно *касательныхъ* кривой. Такъ Паскалеву шестиугольнику соотвѣтствуетъ теорема Бріаншона объ описанномъ шестиугольникѣ; теоремѣ Дезарга соотвѣтствуетъ слѣдующая теорема, которая, какъ мнѣ кажется, дана была въ первый разъ Штурмомъ [262]): „Когда четыреугольникъ описанъ около коническаго сѣченія, то прямыя, проведенныя изъ какой-нибудь точки къ четыремъ его вершинамъ, вмѣстѣ съ двумя касательными, проведенными къ кривой изъ той же точки, составляютъ пучекъ въ инволюціи.“ Теоремѣ древнихъ *ad quatuor lineas* соотвѣтствуетъ, по нашему мнѣнію, слѣдующая теорема, которая доказана нами въ

---

[262]) Эта теорема должна была быть содержаніемъ обѣщаннаго Штурмомъ мемуара, который долженъ былъ составлять продолженіе двухъ первыхъ его мемуаровъ о теоріи линій втораго порядка, напечатанныхъ въ *Annales de Mathématiques*, t. XVI et XVII; но мемуаръ этотъ не былъ изданъ.

Mémoire sur les transformations paraboliques [263]): „если четыреугольникъ описанъ около коническаго сѣченія, то произведеніе разстояній какой-нибудь касательной отъ двухъ противоположныхъ вершинъ находится въ постоянномъ отношеніи къ произведенію ея разстояній отъ двухъ другихъ вершинъ". Наконецъ Понселе въ *Théorie des polaires réciproques* показалъ, что для теоремы Ньютона объ органическомъ образованіи коническихъ сѣченій существуетъ также соотвѣтствующая теорема; точно также, какъ и для теоремы Карно объ отрѣзкахъ, образуемыхъ коническимъ сѣченіемъ на трехъ сторонахъ треугольника [264]).

Слѣдуетъ ожидать, что всѣ эти новыя теоремы, выражающія общія свойства шести касательныхъ коническаго сѣченія, должны проистекать, подобно теоремамъ, имъ соотвѣтствующимъ, изъ одного предложенія, которое должно само соотвѣтствовать предложенію, названному нами въ предыдущемъ Примѣчаніи *ангармоническимъ свойствомъ* точекъ коническаго сѣченія.

Такое новое предложеніе дѣйствительно существуетъ и его можно выразить такъ:

Представимъ себѣ на плоскости двѣ прямыя, изъ которыхъ каждая раздѣлена на отрѣзки четырьмя точками; если точки дѣленія первой прямой соотвѣтствуютъ точкамъ дѣленія второй такъ, что ангармоническое отношеніе четырехъ первыхъ точекъ равно ангармоническому отношенію четырехъ другихъ, то четыре прямыя, соединяющія попарно соотвѣтственныя точки, вмѣстѣ съ двумя данными прямыми будутъ шесть касательныхъ къ одному коническому сѣченію [265]).

---

[263]) *Correspondance mathématique* de Bruxelles, t. V, art. 10, p. 289.

[264]) *Journal de mathématiques* de M. Crelle, t. IV.

[265]) Когда двѣ данныя прямыя не находятся въ одной плоскости, то прямыя, соединяющія точки ихъ дѣленій, образуютъ гиперболоидъ съ одною полостью. Мы доказали это въ иной формѣ въ *Correspondance de l'école Polytechnique,* t. II, p. 446. Изъ этой-то общей теоре-

Не трудно видѣть, что теорема эта заключаетъ въ себѣ безчисленное множество различныхъ предложеній, относящихся къ органическому образованію коническихъ сѣченій посредствомъ касательныхъ. Дѣйствительно, двѣ прямыя могутъ быть безконечно разнообразно раздѣлены такъ, чтобъ ангармоническія отношенія какихъ-нибудь четырехъ точекъ на одной прямой и соотвѣтствующихъ имъ точекъ на другой, были равны между собою.

Разсматривая въ коническихъ сѣченіяхъ Аполлонія и у новыхъ писателей различныя предложенія, относящіяся къ касательнымъ коническаго сѣченія, мы замѣтили, что почти всѣ они суть приложенія и слѣдствія только что изложенной теоремы. Важнѣйшія теоремы, упомянутыя нами въ началѣ этого Примѣчанія, какъ напримѣръ теорема Бріаншона, представляютъ только разныя выраженія или преобразованія этой теоремы, которая, такимъ образомъ составляетъ связь между этими различными предложеніями и служитъ для перехода отъ одного изъ нихъ къ другому.

Мы будемъ называть эту теорему *ангармоническимъ свойствомъ касательныхъ* коническаго сѣченія.

Намъ остается доказать эту теорему. Для этого достаточно немногихъ словъ.

Такъ какъ теорема выражаетъ равенство ангармоническихъ отношеній, равенство, которое сохраняется при перспективномъ приложеніи фигуры, то достаточно доказать ее для круга, служащаго основаніемъ конусу, на которомъ начерчено коническое сѣченіе. Другими словами, надобно доказать, что, если уголъ описанъ около круга и проведены какія-нибудь четыре касательныя, то ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ пересѣченія этихъ касательныхъ съ съ одною стороною угла равно ангармоническому отношенію точекъ пересѣченій ея съ другою стороною. Но это

мы въ пространствѣ мы и вывели свойство коническихъ сѣченій, о которомъ здѣсь идетъ рѣчь. (См. *Correspondance mathématique* de M. Quetelet, t IV, p. 364).

очевидно; потому что отрѣзокъ каждой касательной между сторонами угла видѣнъ изъ центра круга подъ постояннымъ угломъ; слѣдовательно отрѣзки двухъ касательныхъ между сторонами угла видны изъ центра подъ равными углами. Отсюда заключаемъ, что четыре прямыя, проведенныя изъ центра къ точкамъ встрѣчи четырехъ касательныхъ съ одною стороною угла, имѣютъ одинаковое ангармоническое отношеніе съ четырьмя прямыми, проведенными къ точкамъ встрѣчи касательныхъ съ другою стороною, а потому и точки дѣленія на той и другой сторонѣ угла имѣютъ одинаковыя ангармоническія отношенія.

Теорема такимъ образомъ доказана.

Этой теоремѣ можно дать иной видъ, выразивъ ее трехчленнымъ уравненіемъ, и тогда она является новымъ предложеніемъ, способнымъ къ новымъ многочисленнымъ примѣненіямъ.

Это новое предложеніе мы изложимъ слѣдующимъ образомъ:

На плоскости даны двѣ сѣкущія; на первой изъ нихъ произвольно взяты двѣ постоянныя точки O, E, и на второй также двѣ постоянныя точки O' E'; если двѣ точки a, a' перемѣщаются по этимъ прямымъ такъ, что всегда существуетъ соотношеніе

$$\frac{Oa}{Ea} + \lambda \frac{O'a'}{E'a'} = \mu,$$

гдѣ λ и μ—постоянныя.

То прямая aa' во всякомъ своемъ положеніи будетъ касаться коническаго сѣченія, касающагося двухъ данныхъ неподвижныхъ сѣкущихъ.

Это предложеніе ведетъ ко множеству слѣдствій, которыя мы получаемъ, располагая различнымъ образомъ данными вопроса, т.-е. двумя сѣкущими, четырьмя взятыми на нихъ точками и двумя коэффиціентами λ μ.

Если между этими данными существуетъ соотношеніе:

$$\frac{OS}{ES}+\lambda\frac{O'S}{E'S}=\mu,$$

гдѣ S есть точка пересѣченія двухъ сѣкущихъ, то коническое сѣченіе обращается въ одну точку; т.-е. прямая aa' будетъ во всѣхъ своихъ положеніяхъ проходить черезъ одну и ту же точку,

Это, напримѣръ, будетъ, когда точки E, E' помѣстимъ въ точкѣ S пересѣченія сѣкущихъ. Тогда уравненіе

$$\frac{Oa}{Sa}+\lambda\frac{O'a'}{Sa'}=\mu$$

выражаетъ одну точку.

Мы еще возвратимся въ другомъ мѣстѣ къ теоремѣ, составляющей предметъ этого Примѣчанія. Тамъ мы будемъ разсматривать ее какъ свойство *гомографическихъ* фигуръ и изложимъ ее въ иномъ видѣ, обнаруживающемъ многочисленность ея приложеній; именно:

Когда двѣ прямыя на плоскости раздѣлены гомографически, то прямыя, соединяющія точки дѣленія первой съ соотвѣтствующими точками другой огибаютъ коническое сѣченіе, касающееся двухъ данныхъ прямыхъ.

Въ предыдущей теоремѣ можно систему двухъ сѣкущихъ замѣнить окружностію круга. Тогда получается такая теорема:

Даны какія-нибудь четыре постоянныя точки O, E, O', E' на окружности; если будемъ брать на этой окружности двѣ перемѣнныя точки a, a' такъ, чтобы всегда существовало соотношеніе:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\,aO}{\sin\frac{1}{2}\,aE}+\lambda\frac{\sin\frac{1}{2}\,a'O'}{\sin\frac{1}{2}\,a'E'}=\mu,$$

гдѣ λ *и* μ*—постоянныя*:

То хорда aa' будетъ огибать коническое сѣченіе имѣющее двойное прикосновеніе съ окружностію и касающееся прямой EE'.

Это предложеніе вмѣстѣ съ изложенными уже двумя другими, представляющими аналогію съ ангармоническимъ отношеніемъ четырехъ и инволюціею шести точекъ, составляетъ особую теорію, въ которой множество свойствъ системы двухъ прямыхъ переносятся на окружность круга и всѣ эти свойства, послѣ надлежащихъ преобразованій распространяются на какое угодно коническое сѣченіе; это есть новый источникъ для вывода свойствъ этихъ кривыхъ.

Здѣсь мы ограничимся только замѣчаніемъ, что, если въ предыдущей теоремѣ возьмемъ точки E, E' на концахъ діаметровъ, проходящихъ черезъ точки O, O'; то уравненіе принимаетъ слѣдующую, болѣе простую, форму:

$$\tang \frac{1}{2} aO + \lambda \tang \frac{1}{2} a'O' = \mu,$$

и это составляетъ новую теорему.

Между слѣдствіями, проистекающими изъ этой теоремы, мы находимъ слѣдующее свойство круга кривизны въ какой-нибудь точкѣ коническаго сѣченія:

Если въ точкѣ A коническаго сѣченія проведемъ кругъ кривизны, то всякая касательная кривой будетъ встрѣчать его въ двухъ такихъ точкахъ, что разность котангенсовъ полу-дугъ, заключающихся между этими точками и точкою A,—постоянна.

ПРИМѢЧАНІЕ XVII.

(Третья эпоха, n° 24).

О Мавроликѣ и Гуарини.

Мавроликъ (Maurolicus), самый ученый изъ геометровъ своего времени, написалъ множество сочиненій, въ кото-

рыхъ нерѣдко встрѣчаются удачныя нововведенія и слѣды генія.

Онъ первый сдѣлалъ замѣчаніе, которое въ его рукахъ сдѣлалось основаніемъ новыхъ началъ Гномоники; именно, что конецъ тѣни гномона описываетъ ежедневно дугу коническаго сѣченія: по этому поводу онъ и написалъ свой трактатъ о коническихъ сѣченіяхъ, о которомъ мы говорили и который былъ предметомъ 3-й книги его Гномоники, появившейся въ 1553 и потомъ въ 1575 году подъ заглавіемъ: *de lineis horariis libri* III. Но въ сочиненіи этомъ входитъ только то, что необходимо для Гномоники и не заключается всѣхъ свойствъ этихъ кривыхъ, которыя находимъ у Аполлонія.

Мавролику принадлежитъ также введеніе въ тригонометрическія исчисленія секансовъ, таблицу которыхъ онъ напечаталъ въ изданіи *Theodosii sphaericorum libri* III, 1558.

Анализъ также чрезвычайно много обязанъ этому геометру, о которомъ впрочемъ рѣдко упоминаютъ по этому поводу. Онъ первый ввелъ употребленіе буквъ вмѣсто чиселъ въ ариѳметическихъ вычисленіяхъ и первый далъ правила алгебраическаго знакоположенія. Этимъ нововведеніемъ Мавроликъ хотѣлъ довести дѣйствія надъ числами до тойже общности, какъ и графическія построенія геометріи, совокупность которыхъ всегда ясно видна, всегда можетъ быть прослѣжена мысленно и имѣетъ особую выгоду примѣняться къ тысячамъ различныхъ приложеній.

О Гуарини (Guarini) мы упомянули по случаю теоремы Птоломея въ Примѣчаніи VI и по поводу теоріи коническихъ сѣченій, когда говорили о большомъ трактатѣ Де-Лагира.

Мы удивляемся, почему у авторовъ, писавшихъ объ исторіи математики, нигдѣ нѣтъ ни малѣйшаго указанія на сочиненіе этого геометра, подъ заглавіемъ: *Euclides adauctus et methodicus, mathematicaque universalis* (in fol. Turin, 1671; болѣе 700 страницъ въ два столбца). Оно содержитъ въ

себѣ 35 трактатовъ о различныхъ отдѣлахъ теоретической и практической геометріи. На 32-й трактатъ можно смотрѣть, какъ на главу изъ нашей современной начертательной геометріи. Здѣсь говорится о проложеніи на плоскость линій, происходящихъ отъ сопересѣченія шара, конуса и цилиндра и о развертываніи этихъ кривыхъ двоякой кривизны на плоскость.

Гуарини написалъ еще трактатъ объ астрономіи, подъ заглавіемъ: *Mathematica coelestis* (in fol. Milan, 1683); это сочиненіе упомянуто у Вейдлера и Лаланда, у перваго съ прибавленіемъ слѣдующей похвалы: *A perspicuitate commendatur*.

Оба эти знаменитые писателя могли бы включить въ астрономическую библіографію еще слѣдующее сочиненіе Гуарини: *Placita philosophica* (in fol. Paris, 1666); здѣсь, между многими предметами физики, логики и метафизики, мы находимъ, что авторъ разрушаетъ систему Птоломея замѣняя ее теоріею движенія планетъ по спиральнымъ линіямъ. Онъ высказалъ также особое мнѣніе о приливѣ и отливѣ моря и о различныхъ другихъ явленіяхъ.

ПРИМѢЧАНІЕ XVIII.

(*Третья эпоха, n° 34*).

О тождествѣ гомологическихъ фигуръ съ тѣми, которыя получаются посредствомъ перспективы. Замѣчаніе о перспективѣ Стевина.

Не трудно видѣть, что фигуры Де-Лагира, Ле-Пуавра и фигуры гомологическія тождественны съ тѣми, которыя получаются по способу перспективы при помощи *точки зрѣнія* и *точекъ разстояній*. Дѣйствительно, послѣднія фигуры обладаютъ двумя характеристическими признаками первыхъ, именно 1° въ нихъ гомологическія прямыя пересѣкаются на

одной прямой, именно на *общемъ прорѣзѣ* и 2° гомологическія точки находятся на прямыхъ, проходящихъ черезъ одну точку (именно черезъ ту точку, въ которую помѣстилась бы точка зрѣнія, еслибы горизонтальная плоскость, проходящая черезъ глазъ, совмѣстилась съ плоскостію картины, вращаясь около *горизонтальной линіи*). Но это второе свойство перспективныхъ фигуръ, получаемыхъ въ приложеніяхъ посредствомъ *точки зрѣнія* и *точекъ разстоянія*, рѣдко доказывается въ трактатахъ о перспективѣ; изъ чрезвычайно большаго числа сочиненій этого рода мы замѣтили это предложеніе только у Озанама, Жора (Jeaurat), Ламберта (изд. 1773 г.) и въ новѣйшемъ сочиненіи Шоке.

Въ другихъ способахъ перспективы, гдѣ точка зрѣнія совмѣщается на плоскость фигуры, каковы способы Стевина, Гравезанда, Тейлора и Жакье, тождество получаемыхъ фигуръ съ фигурами Де-Лагира, Ле-Пуавра и съ фигурами гомологическими очевидно, такъ какъ здѣсь на самой практикѣ пользуются двумя вышеуказанными характеристическими свойствами.

О Гравезандѣ и Тейлорѣ упоминаютъ съ полною справедливостью, какъ о изслѣдователяхъ перспективы новымъ и научнымъ образомъ; но удивительно, что проходятъ молчаніемъ Стевина, который цѣлымъ столѣтіемъ ранѣе также внесъ обновленіе въ этотъ предметъ, изслѣдовалъ его, какъ глубокій геометръ, и, можетъ быть, полнѣе чѣмъ кто-нибудь съ теоретической стороны.

У этого писателя мы находимъ геометрическое рѣшеніе слѣдующаго вопроса, обратнаго задачѣ перспективы: *Даны на плоскости, въ какомъ-нибудь относительномъ положеніи, двѣ фигуры, представляющія одна перспективу другой; требуется помѣстить ихъ въ пространствѣ въ перспективѣ и найти положеніе точки зрѣнія.*

Правда, Стевинъ рѣшаетъ только нѣкоторые частные случаи этого вопроса, изъ которыхъ самый трудный тотъ, когда одна фигура есть четыреугольникъ, а другая параллелограммъ.

Случай, когда обѣ фигуры суть какіе-нибудь четыреугольники обнимаетъ собою весь вопросъ; но Стевинъ не могъ рѣшить его, потому что онъ пользовался только начертательными свойствами перспективныхъ фигуръ, здѣсь же необходимо разсматривать также и метрическія соотношенія ихъ.

Мы будемъ имѣть случай рѣшить этотъ общій вопросъ, когда будемъ говорить о приложеніяхъ нашего принципа *гомографическаго преобразованія.*

ПРИМѢЧАНІЕ XIX.

(*Третья эпоха n° 35*).

О Ньютоновомъ способѣ преобразованія однѣхъ фигуръ въ другія того же рода. (Лемма XXII первой книги Principia).

Чтобы привести фигуры Ньютона въ такое же относительное положеніе, въ которомъ онѣ находятся у Де-Лагира, надобно повернуть вторую фигуру около точки B [266]) до тѣхъ поръ, пока ординаты ея dg сдѣлаются параллельны ординатамъ DG первой фигуры.

Линія aB второй кривой послѣ этого вращенія приметъ положеніе $a'B$. Проведемъ черезъ точку A прямую Ao' равную и параллельную $a'B$; точка o' будетъ *полюсъ* (или *центръ гомологіи*), а прямая Ba въ первоначальномъ своемъ положеніи—*образующая* (или *ось гомологіи*).

Чтобы показать теперь, какимъ образомъ способы перспективы могли привести Ньютона къ его преобразованію, представимъ себѣ въ пространствѣ плоскую кривую и плоскость, на которой образуемъ перспективу этой кривой; черезъ мѣсто глаза проведемъ сѣкущую плоскость и около

---

[266]) Мы предполагаемъ, что читатель имѣетъ передъ глазами текстъ Ньютона.

прямыхъ, въ которыхъ она пересѣкается съ плоскостями кривой и ея перспективы, повернемъ эти двѣ плоскости до совмѣщенія ихъ съ сѣкущею плоскостію; тогда данная кривая, ея перспектива и точка зрѣнія будутъ въ одной плоскости и представятъ именно фигуры Ньютона.

Такимъ образомъ способъ Ньютона могъ бы служить практическимъ пріемомъ перспективы. Дѣйствительно мы находимъ, что онъ мало отличается отъ перваго изъ двухъ правилъ Виньоля (Vignole), доказанныхъ Дантомъ (Egnazio Dante) и воспроизведенныхъ Сиригатти и многими другими геометрами.

ПРИМѢЧАНІЕ XX.

(*Четвертая эпоха, n° 4*).

Объ образованіи кривыхъ 3-го порядка посредствомъ пяти расходящихся параболъ и посредствомъ пяти кривыхъ, имѣющихъ центръ.

Обѣ теоремы, которыя мы предполагаемъ доказать, основываются на одномъ свойствѣ точекъ перегиба въ кривыхъ третьяго порядка; свойство это можетъ быть выражено слѣдующимъ образомъ:

Если около точки перегиба кривой третьяго порядка будемъ вращать сѣкущую и въ двухъ точкахъ пересѣченія ея съ кривою проводить касательныя, то точка встрѣчи этихъ касательныхъ будетъ описывать прямую линію.

На этой же прямой встрѣчаются прямыя соединяющія попарно точки пересѣченія двухъ сѣкущихъ съ кривою.

Наконецъ эта же прямая пересѣкаетъ каждую сѣкущую въ точкѣ гармонически-сопряженной съ точкою перегиба относительно двухъ точекъ пересѣченія сѣкущей съ кривою.

Само собою ясно, что эта прямая проходитъ черезъ точки прикосновенія трехъ касательныхъ, которыя вообще

можно провести къ кривой изъ точки перегиба. Изъ этого мы видимъ, что эта прямая и точка перегиба играютъ по отношенію къ кривой такую же роль, какъ точка и ея поляра по отношенію къ коническому сѣченію. Мы назовемъ поэтому эту прямую—*полярою* точки перегиба.

Высказанная теорема легко можетъ быть доказана путемъ геометрическихъ соображеній и отсюда можно вывесть различныя свойства кривыхъ третьяго порядка. Здѣсь мы предлагаемъ себѣ показать только приложеніе этой теоремы къ доказательству двухъ способовъ происхожденія всѣхъ кривыхъ третьяго порядка посредствомъ тѣней пяти изъ нихъ.

Извѣстно, что каждая кривая третьяго порядка имѣетъ или одну, или три точки перегиба. Если посредствомъ перспективы проложимъ кривую такъ, чтобы одна изъ точекъ перегиба удалилась въ безконечность, то поляра ея, на основаніи третьей части нашего предложенія, сдѣлается *діаметромъ* кривой. Таково происхожденіе діаметровъ въ кривыхъ третьяго порядка.

Сдѣлаемъ теперь перспективу такъ, чтобы не только точка перегиба, но и касательная къ кривой въ этой точкѣ была удалена въ безконечность; тогда кривая будетъ имѣть діаметръ, но не будетъ имѣть асимптотъ, и потому будетъ отличаться чисто параболическимъ характеромъ; въ этомъ и заключается исключительный признакъ пяти расходящихся параболъ. Такимъ образомъ доказано, что всякая кривая третьяго порядка можетъ пролагаться посредствомъ перспективы по одной изъ пяти расходящихся параболъ; отсюда обратно слѣдуетъ, что эти пять кривыхъ могутъ своими тѣнями образовать всѣ другія кривыя. Въ этомъ состоитъ первая изъ доказываемыхъ нами теоремъ; она принадлежитъ Ньютону.

Переходимъ ко второй. Представимъ себѣ въ данной кривой поляру ея точки перегиба и сдѣлаемъ перспективное проложеніе кривой такъ, чтобы эта поляра удалилась въ безконечность: изъ третьей части нашей теоремы слѣдуетъ,

что въ проложеніи точка перегиба будетъ центромъ кривой. Слѣдовательно всякая кривая третьяго порядка можетъ быть посредствомъ перспективы проложена по кривой, имѣющей центръ; отсюда обратно заключаемъ, что пять кривыхъ, имѣющихъ центръ, могутъ посредствомъ своихъ тѣней образовать всѣ остальныя кривыя. Въ этомъ состоитъ вторая изъ теоремъ, которыя мы желали доказать.

Эта теорема и предыдущая теорема Ньютона могутъ быть выражены въ одномъ предложеніи.

Подобно кривымъ втораго порядка, которыя ведутъ только къ одному виду конуса, кривыя третьяго порядка могутъ вести только къ пяти видамъ конусовъ.

Пересѣкая эти конусы извѣстнымъ образомъ, получимъ пять кубическихъ параболъ.

При другихъ способахъ пересѣченія получаются пять кривыхъ, имѣющихъ центръ.

Теорема, приведенная въ началѣ этого Примѣчанія, даетъ очень простое объясненіе различныхъ свойствъ кривыхъ третьяго порядка, имѣющихъ центръ, и также многихъ свойствъ точекъ перегиба. Но мы не можемъ входить здѣсь въ дальнѣйшія подробности.

ПРИМѢЧАНІЕ XXI.

(*Четвертая эпоха, n° 18*).

Объ овалахъ Декарта, или объ апланетическихъ линіяхъ.

Кетле въ своей прекрасной теоріи *вторичныхъ каустическихъ линій* (*caustiques secondaires*), представляющихъ собою развертывающія каустическихъ линій Чирнгаузена, нашелъ, что вторичныя каустическія линіи при отраженіи и преломленіи на кругѣ, освѣщенномъ одною свѣтящеюся

точкою, суть овалы Декарта, или апланетическія линіи [267]). Въ то же самое время Штурмъ [268]) съ своей стороны пришелъ къ тому же результату, представляющему второе приложеніе къ діоптрикѣ оваловъ, изобрѣтенныхъ Декартомъ именно для этой науки.

Теорему Кетле можно выразить геометрически въ такихъ словахъ:

На плоскости даются два неподвижные круга; если будемъ перемѣщать центръ третьяго круга по окружности перваго, радіусъ же брать пропорціонально разстоянію— его центра отъ окружности втораго круга, то огибающая подвижнаго круга будетъ кривая четвертаго порядка, представляющая совокупность двухъ сопряженныхъ оваловъ Декарта.

Между различными интересными свойствами, найденными Кетле въ этой кривой, мы укажемъ здѣсь два способа образованія ея на поверхностяхъ, или, по выраженію древнихъ, посредствомъ *loca ad superficiem*.

Первый способъ: „Вообразимъ себѣ шаръ и прямой конусъ и сдѣлаемъ стереографическую проэкцію кривой пересѣченія этихъ двухъ поверхностей, помѣстивъ глазъ въ концѣ того діаметра шара, который параллеленъ оси конуса и взявъ за плоскость проэкціи—плоскость перпендикулярную къ оси конуса, въ проэкціи получимъ апланетическую линію.“ [269]).

Второй способъ: „Представимъ себѣ два прямые конуса, вершины которыхъ находятся въ различныхъ точкахъ и оси которыхъ параллельны; пересѣченіе этихъ двухъ конусовъ пролагается на плоскость перпендикулярную къ ихъ осямъ по апланетической линіи“ [270]).

---

[267]) *Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, t. III.

[268]) *Annales des mathématiques* de Gergonne. t. XV.

[269]) *Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, t. V и дополненіе Кетле къ *Traité de la Lumière* Гершеля, стр. 403.

[270]) *Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, t. V и дополненіе Кетле къ *Traité de la Lumière* Гершеля, стр. 397.

Оба эти способа образованія даютъ въ совокупности два овала, составляющіе полную апланетическую линію; съ помощію ихъ удобно обнаруживаются различныя формы, въ которыхъ могутъ являться эти кривыя и въ особенности тѣ, которыя ускользнули отъ анализа Декарта.

Мы нашли, что вторая теорема можетъ быть обобщена слѣдующимъ образомъ.

„Если два косые конуса имѣютъ основаніями двѣ окружности въ одной плоскости и если прямыя, соединяющія центры основаній съ вершинами соотвѣтственныхъ конусовъ, пересѣкаются въ пространствѣ въ одной точкѣ, то третій конусъ, имѣющій эту точку вершиною и проходящій черезъ кривую пересѣченія первыхъ двухъ конусовъ, пересѣкаетъ плоскость ихъ основаній по кривой четвертаго порядка, которая есть апланетическая линія“ [271]).

Апланетическія линіи можно получать на плоскости, не прибѣгая къ мѣстамъ на поверхности и къ проэкціямъ, посредствомъ слѣдующаго построенія, которое ведетъ къ цѣли скорѣе, нежели построеніе Декарта, и имѣетъ еще то преимущество, что доставляетъ за разъ оба сопряженные овала.

На плоскости даны два круга; если около точки, взятой на линіи, соединяющей центры обоихъ круговъ, будемъ вращать сѣкущую, пересѣкающую каждый изъ круговъ въ двухъ точкахъ, то радіусы, проводимые изъ центровъ круговъ къ соотвѣтственнымъ точкамъ пересѣченія съ сѣкущей, будутъ встрѣчаться между собою въ четырехъ точкахъ, геометрическое мѣсто которыхъ есть полная апланетическая линія, имѣющая фокусами центры обоихъ круговъ.

Построеніе это вытекаетъ прямо изъ Птоломеевой теоремы о треугольникѣ, пересѣченномъ трансверсалью. Дѣйствительно, теорема эта въ приложеніи къ нашей фигурѣ пока-

---

[271]) Первую теорему можно также обобщить и разсматривать апланетическія линіи, вмѣсто конуса, на какой угодно поверхности втораго порядка.

зываетъ, что въ каждой точкѣ описываемой кривой отношеніе разстояній этой точки отъ двухъ окружностей есть величина постоянная.

Такой способъ черченія имѣетъ еще то преимущество, что онъ безъ всякаго новаго построенія даетъ касательныя къ кривой; въ самомъ дѣлѣ, каждой точкѣ кривой соотвѣтствуютъ по построенію двѣ точки на двухъ окружностяхъ и касательныя къ кривой и къ двумъ кругамъ въ этихъ трехъ точкахъ проходятъ черезъ одну и ту же точку, какъ это легко доказать при помощи одной геометрической теоремы [272].

Всегда полезно знать какъ можно болѣе различныхъ способовъ построенія одной и той же кривой, потому что каждое изъ нихъ выражаетъ отличительное свойство кривой, изъ котораго естественно проистекаютъ многія другія свойства, не столь легко выводимыя изъ другихъ способовъ построенія.

Въ предыдущихъ способахъ построенія кривой мы пользовались обоими ея фокусами; но есть еще способъ въ которомъ употребляется только одинъ фокусъ и который представляетъ еще многія другія преимущества; именно:

Даны кругъ и въ его плоскости произвольная неподвижная точка; если изъ этой точки проведемъ радіусъ-векторъ къ точкѣ окружности и еще другую прямую, образующую съ постоянной осью уголъ вдвое большій угла между радіусомъ векторомъ съ тою-же осью, за тѣмъ на этой второй прямой отложимъ, начиная отъ названной точки, отрѣзокъ пропорціональный квадрату радіуса-вектора, то геометрическимъ мѣстомъ конца этого отрѣзка будетъ апланетическая линія, состоящая изъ двухъ сопряженныхъ оваловъ и имѣющая фокусомъ неподвижную точку.

Такъ какъ здѣсь апланетическая линія выводится прямо изъ круга, то теорема эта особенно удобна для открытія многихъ свойствъ кривой. Такъ напримѣръ, извѣстныя свой-

[272]) *Correspondance mathématique de Bruxellès,* t. V, p. 116.

ства двухъ и трехъ круговъ непосредственно могутъ быть примѣнены къ системѣ двухъ и трехъ апланетическихъ линій, имѣющихъ общій фокусъ.

Чтобы воспользоваться этою теоремою, замѣтимъ еще, что въ томъ случаѣ, когда конецъ радіуса-вектора описываетъ вмѣсто круга прямую линію, мы получаемъ параболу, имѣющую фокусъ въ неподвижной точкѣ.

Когда, напримѣръ, двѣ прямыя вращаются около двухъ неподвижныхъ точекъ, образуя уголъ постоянной величины, то точка пересѣченія ихъ описываетъ кругъ; отсюда мы заключаемъ:

Положимъ, что мы имѣемъ двѣ группы параболъ, которыя всѣ имѣютъ общій фокусъ и изъ которыхъ однѣ проходятъ черезъ одну,—другія же черезъ другую неподвижную точку; если будемъ брать изъ обѣихъ группъ тѣ параболы, оси которыхъ составляютъ постоянный уголъ, то точки пересѣченія такихъ двухъ параболъ будутъ лежать на апланетической линіи.

Теорема эта ведетъ ко многимъ слѣдствіямъ, изслѣдованіемъ которыхъ мы здѣсь заняться не можемъ [273]).

Апланетическія линіи обладаютъ еще однимъ замѣчательнымъ свойствомъ, которое, какъ мнѣ кажется, не было еще никѣмъ указано: онѣ имѣютъ именно *не два*, *а всегда три фокуса*, т.-е. кромѣ двухъ фокусовъ, служащихъ для построенія, существуетъ еще третій, который съ каждымъ изъ двухъ первыхъ играетъ такую же роль, какъ и тѣ между собою. Разсмотрѣніе трехъ фокусовъ въ особенности удобно для изученія всевозможныхъ формъ апланетическихъ линій.

Когда одинъ изъ фокусовъ удаляется въ безконечность, то кривая обращается въ коническое сѣченіе, удерживая два остальные фокусы.

---

[273]) Отсюда выводится, между прочимъ, теорема, которую употребляетъ Кетле въ *Mémoire sur quelques constructions graphiques des orbites planetaires (Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, t. III).

Когда два фокуса совпадаютъ, то кривая имѣетъ узелъ; она обращается въ *улиткообразную* Паскаля (*limaçon*) и имѣетъ также два фокуса.

Наконецъ апланетическія линіи отличаются еще общимъ родовымъ характеромъ, который указываетъ свойственное имъ мѣсто между многочисленными кривыми четвертаго порядка; онѣ имѣютъ именно *двѣ мнимыя сопряженныя точки, лежащія въ безконечности*. Отсюда мы заключаемъ, что къ такой кривой изъ внѣшней точки можно вообще провести восемь касательныхъ и во всякомъ случаѣ не болѣе.

ПРИМѢЧАНІЕ XXII.

(*Четвертая эпоха* n° *29*).

Обобщеніе двухъ общихъ теоремъ Стеварта.

Двѣ слѣдующія теоремы представляютъ значительно болѣе общности, нежели теоремы Стеварта, и изъ нихъ можно вывести еще многія другія.

Первая теорема. *Дано m точекъ A, B, C... на плоскости и столько же количествъ a, b, c ...; пусть будетъ n менѣе m; можно опредѣлить $n+1$ другихъ точекъ A', B', C'... такъ, что между разстояніями произвольной точки M отъ данныхъ точекъ и ея же разстояніями отъ найденныхъ точекъ будетъ имѣть мѣсто n соотношеній, выражаемыхъ формулою*

$$a.MA^{2(n-\delta)}+b.MB^{2(n-\delta)}+\ldots. =$$

$$(MA'^{2(n-\delta)}+MB'^{2(n-\delta)}+\ldots.)\frac{a+b+c+\ldots}{n+1},$$

въ которой величинѣ δ можно дать n значеній : 0, 1, 2 .... $n-1$.

Если положимъ $\delta = 0$, то получимъ 44-ю теорему Стеварта.

Другія величины δ даютъ другія соотношенія, которыя можно выразить всѣ какъ особыя теоремы, но которыя тѣмъ не менѣе существуютъ всѣ одновременно. Эта совмѣстность n различныхъ соотношеній и составляетъ характеръ приведенной теоремы.

При этомъ не слѣдуетъ забывать, что положеніе точки M остается неопредѣленнымъ, такъ что для каждаго положенія можемъ получить свои n соотношеній.

Величина δ можетъ имѣть еще одно значеніе, именно $\delta = n$; но это приводитъ къ тождественному равенству:

$$a + b + c + \ldots = (n+1) . \frac{a + b + c + \ldots}{n+1}$$

поэтому мы и ограничили число всѣхъ значеній δ числомъ n.

Вторая теорема. *Дано m прямыхъ линій на плоскости и столько же количествъ a, b, c ...; пусть будетъ n какое-нибудь число, меньше m; можно найти $n+1$ другихъ прямыхъ такъ, что между перпендикулярами $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$ ... опущенными изъ какой угодно точки M на эти прямыя и перпендикулярами $M\alpha'$, $M\beta'$, $M\gamma'$ ... опущенными на найденныя прямыя будетъ существовать $\frac{n+1}{2}$, или $\frac{n}{2}$, соотношеній, выражаемыхъ формулою*

$$a . M\alpha^{(n-2\delta)} + b . M\beta^{(n-2\delta)} + \ldots =$$

$$(M\alpha'^{(n-2\delta)} + M\beta'^{(n-2\delta)} + \ldots) . \frac{a + b + c + \ldots}{n+1},$$

гдѣ δ можетъ принимать $\frac{n+1}{2}$ значеній: 0, 1, 2 ... $\frac{n-1}{2}$, когда n нечетное и $\frac{n}{2}$ значеній: 0, 1, 2 ... $\frac{n-2}{2}$, когда n—четное.

При $\delta=0$ получаемъ теорему, выраженную въ 49 и 53 предложеніяхъ Стеварта.

Другія значенія δ ведутъ къ другимъ соотношеніямъ, выражающимъ собою столько же различныхъ теоремъ, имѣющихъ мѣсто одновременно, каково бы ни было притомъ положеніе точки *M*.

Кажется, теоремы Стеварта, заключающіяся въ двухъ вышеприведенныхъ общихъ предложеніяхъ, оставались до сихъ поръ безъ примѣненія, представляя собою особаго рода свойства системы точекъ и прямыхъ линій. Но можно думать, что подобныя системы обладаютъ и другими подобными же свойствами, которыя всѣ могутъ примыкать къ одной теоріи. Я имѣю, напримѣръ, нѣкоторое основаніе предполагать, что система данныхъ точекъ вмѣстѣ съ системою точекъ, опредѣляемыхъ въ первой изъ вышеприведенныхъ теоремъ, обладаютъ свойствами, подобными свойствамъ концовъ сопряженныхъ діаметровъ эллипса. Можно по крайней мѣрѣ составить сколько угодно системъ (безъ сомнѣнія подчиненныхъ извѣстнымъ законамъ), которыя представляютъ всѣ эти свойства.

Но, несмотря на эту первую аналогію я могу ошибаться, дѣлая это предположеніе. Какъ бы то ни было, слѣдуетъ, мнѣ кажется, признать, что теоремы Стеварта представляютъ только первый шагъ къ новымъ изысканіямъ, заслуживающимъ вниманія и труда геометровъ.

ПРИМѢЧАНІЕ XXIII.

(*Пятая эпоха*, n^0 *1*).

О происхожденіи и развитіи начертательной геометріи.

Признавъ Монжа творцомъ начертательной геометріи, мы должны однако по справедливости сказать, что многіе пріемы этой науки и приложенія проэкцій къ различнымъ ча-

стямъ строительнаго искусства извѣстны были уже съ давняго времени, по преимуществу въ плотничномъ и каменесномъ дѣлѣ. Приложеніемъ теоріи проэкцій къ названнымъ искусствамъ занимались Philibert de Lorme, Mathurin Jousse, Desargues, P. Deran и De la Rue. Уже Дезаргъ обнаружилъ аналогію между разнообразными пріемами въ этихъ искусствахъ и свелъ ихъ къ общимъ началамъ. Фрезье (officier superieur du genie), въ своемъ ученомъ и наполненномъ старательными и полезными приложеніями теоретической и практической геометріи сочиненіи *Traité de stéréotomie*, слѣдовалъ идеямъ обобщенія Дезарга и въ общемъ видѣ геометрически изслѣдовалъ различные вопросы, представляющіеся при обтескѣ камней и въ плотничномъ дѣлѣ. Мы укажемъ для примѣра на все, что относится къ развертыванію коническихъ и цилиндрическихъ поверхностей въ плоскость; на теорію пересѣченія сферическихъ, цилиндрическихъ и коническихъ поверхностей между собою, на способъ представлять кривую двоякой кривизны помощію ея проэкцій на плоскостяхъ и т. д.

Но всѣ эти отвлеченные вопросы, обнимающіе собою множество практическихъ задачъ и составляющихъ теперь различныя главы нашей начертательной геометріи, сами зависятъ въ своихъ рѣшеніяхъ отъ еще болѣе элементарныхъ началъ и правилъ, къ которымъ они приводятся подобно тому, какъ всѣ исчисленія приводятся окончательно къ четыремъ первымъ правиламъ ариѳметики. Эти-то отвлеченныя, элементарныя и общія правила,—усмотрѣнныя или открытыя геніемъ Монжа въ стереотомическихъ операціяхъ и соединенныя имъ въ одну науку подъ именемъ *начертательной геометріи*,—и составляютъ ученіе, котораго общность, ясность и простота указываютъ геніальнаго человѣка въ искусномъ продолжателѣ.

Съ помощію этихъ простыхъ и неизмѣнныхъ началъ, или, по выраженію Малюса,—орудій (outils), Монжъ нашелъ возможнымъ повѣрить многіе сомнительные и неточные пріемы

при обдѣлкѣ камней и предпринялъ рѣшеніе такихъ задачъ, которыя, какъ казалось до тѣхъ поръ, переходили за границу познаній стереотомистовъ, или для которыхъ найдены были только эмпирическія рѣшенія.

Говоря о происхожденіи начертательной геометріи, мы не можемъ пройти молчаніемъ заслугъ, оказанныхъ этой наукѣ Лакруа и Гашеттомъ.

Лакруа первый развилъ начала начертательной геометріи и сдѣлалъ ихъ доступными всѣмъ читателямъ въ своемъ сочиненіи, которое сначала носило заглавіе: *Essai sur les plans et les surfaces* (in—8^0 1795), а потомъ—*Complément de Géométrie*; въ этомъ сочиненіи мы встрѣчаемъ ту же ясность и точность которыми отличаются всѣ сочиненія этого знаменитаго ученаго.

Такъ какъ Монжъ въ своемъ сочиненіи о начертательной геометріи имѣлъ въ виду изложить эту науку сколь возможно просто и общедоступно, то онъ первоначально исключилъ изъ нея нѣкоторые болѣе сложные вопросы, которые впрочемъ естественно должны были быть внесены въ нее, когда умы достаточно ознакомились съ новымъ ученіемъ. Этотъ пробѣлъ въ первый разъ пополнилъ Гашеттъ (Hachette), ученикъ Монжа въ Мезьерской школѣ и въ послѣдствіи его товарищъ, какъ профессоръ политехнической школы, написавши два сочиненія *Suppléments a la Géometrie descriptive* (1812 и 1818). Эти новыя общія изысканія, которыми Гашеттъ дополнилъ сочиненіе Монжа, были включены самимъ Монжемъ въ полное изданіе его начертательной геометріи 1821 года (второе изданіе въ 1828 году) и съ тѣхъ поръ перешли въ многочисленныя сочиненія по этому предмету, появившіяся какъ во Франціи, такъ и въ другихъ странахъ. Въ этомъ отношеніи Гашеттъ оказалъ математическимъ наукамъ великую услугу. Особенно, кажется, въ Италіи отдана была полная справедливость этому геометру; тамъ начертательная геометрія и ея приложенія къ инженерному дѣлу разработывались въ широкихъ раз-

мѣрахъ и излагались въ превосходныхъ сочиненіяхъ [274]), при чемъ часто дѣлались ссылки на сочиненія Гашетта, которыя даже принимались за образецъ. Думаемъ, что они особенно много способствовали къ расширенію и распространенію знакомства съ начертательной геометріей [275]).

Въ послѣдствіи во Франціи появились и другія хорошія сочиненія по начертательной геометріи. Мы должны указать на сочиненія Валле, Леруа и Лефебюра де-Фурси. Въ первыхъ двухъ наука изложена во всей полнотѣ ея современнаго состоянія; третье, назначенное главнымъ образомъ для поступающихъ въ политехническую школу, совершенно удовлетворяетъ своей цѣли, благодаря порядку и точности, отличающими всѣ сочиненія ученаго профессора.

Начертательная геометрія продолжаетъ свои успѣхи. Оливье, который уже давно съ особою любовію занимается этимъ отдѣломъ геометріи, напечаталъ въ послѣднихъ томахъ *Journal de l'école polytechnique* нѣсколько мемуаровъ о различныхъ новыхъ вопросахъ, которые безъ сомнѣнія войдутъ въ составъ будущихъ сочиненій по этой наукѣ.

---

[274]) Между многими сочиненіями укажемъ на сочиненіе инженера Серена (Serenus): *Trattato di Geometria descrittiva,* in 4⁰, Roma 1826, и на собраніе различныхъ мемуаровъ, относящихся частію къ приложеніямъ начертательной геометріи, которое, подобно журналу политехнической школы, издавалось ежегодно профессорами римскаго инженернаго училища подъ заглавіемъ: *Ricerche Geometriche ed idrometriche fatte nella scuola degl'ingegneri pontifici d'acque e strade.*

[275]) Примѣчаніе это было уже написано, когда ранняя смерть отняла Гашетта у науки и у его многочисленныхъ друзей. Его бывшіе ученики въ политехнической школѣ, въ особенности тѣ, которые, какъ я, имѣли честь пользоваться его дружбой и которые были знакомы съ нимъ среди его прекрасной семьи, прочтутъ съ чувствомъ умиленія рѣчи, сказанныя на его могилѣ, тремя его товарищами по Академіи, знаменитыми учеными: Араго, Дюпеномъ и Пуассономъ и однимъ изъ его учениковъ, Оливье, продолжающимъ его работы по начертательной геометріи.

ПРИМѢЧАНІЕ XXIV.

(*Пятая эпоха n⁰ 15.*)

О законѣ непрерывности и о началѣ случайныхъ соотношеній.

Можно, безъ сомнѣнія, употреблять выраженіе *начало непрерывности* (principe de continuité) вмѣсто *начало случайныхъ соотношеній* (principe des relations contingentes), но между этими выраженіями существуетъ очень важное различіе, и мы рѣшились предпочесть второе.

Начало непрерывности восходитъ до Лейбница, который первый представилъ его, какъ законъ природы, состоящій въ томъ, что *все образуется незамѣтными переходами*, или, какъ выражались схоластическіе философы, *Natura abhorret a saltu*. Въ такомъ строгомъ смыслѣ и стали съ тѣхъ поръ пользоваться началомъ непрерывности. Оно проистекало слѣдовательно изъ понятія о безконечности. Согласно съ нимъ, покой есть безконечно малое движеніе; совпаденіе— безконечно-малое отдаленіе; равенство—предѣлъ неравенствъ и т. д. Лейбницъ выражаетъ это начало слѣдующимъ образомъ: „Если разность двухъ предметовъ (*les cas*) можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины въ томъ, что дано (*in datis*), или что допущено, то она можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины и въ томъ, что ищется (*in quaesitis*) или что слѣдуетъ; или, говоря проще, когда предметы (les cas) (или то, что дано) постепенно приближаются другъ къ другу и наконецъ совпадаютъ, то должно тоже быть и съ слѣдствіями или выводами (съ тѣмъ что получается)“ [276].

---

[276]) *Nouvelles de la République des Lettres*; Mai 1687, p. 744.

Здѣсь Лейбницъ, въ отвѣтъ Мальбраншу по поводу его ученія о законахъ движенія, излагаетъ свой *законъ непрерывности* который до

Мы видимъ такимъ образомъ, что законъ непрерывности въ томъ видѣ, какъ его понимали Лейбницъ и его послѣдователи, заключаетъ въ себѣ понятіе о безконечности, понятіе, котораго вовсе нѣтъ въ развитомъ нами *началѣ случайныхъ соотношеній*; поэтому мы и употребляемъ выраженіе „начало случайныхъ соотношеній", которое заключаетъ въ себѣ опредѣленную мысль и пріемъ вполнѣ подтверждаемый разсужденіями, основанными на анализѣ.

Но Лейбницъ, правда, разсматривалъ также свой *законъ непрерывности*, какъ вытекающій изъ другаго, болѣе общаго начала, которое онъ выражалъ словами: *Datis ordinatis etiam quaesita sunt ordinata* [277]). Это такое правило, говоритъ онъ въ другомъ мѣстѣ, которое существовало прежде изобрѣтенія логики, и таково-же оно и теперь въ глазахъ народа [278]).

Ив. Бернулли первый заимствовалъ у Лейбница это начало и воспользовался имъ явнымъ образомъ въ первый разъ въ знаменитомъ вопросѣ о передачѣ движеній. Онъ выразилъ его такъ: *если гипотезы остаются тѣ же, то и выводы должны оставаться тѣми же* (*Comm. epist*. Лейбница и Бернулли, т. I, стр. 30).

Это начало обнимаетъ собою и *законъ непрерывности*, понимаемый въ связи съ идеею о безконечности, и законъ *случайныхъ соотношеній*.

Употребленіе закона непрерывности въ геометріи восходитъ вѣроятно къ самому первому времени этой науки, какъ замѣчаетъ это Лакруа въ предисловіи къ своему большому

тѣхъ поръ никѣмъ не былъ высказанъ. Съ тѣхъ поръ Лейбницъ часто возвращался къ этому прекрасному закону и пользовался имъ, какъ признакомъ, или средствомъ испытанія, при повѣркѣ различныхъ ученій. (См. *Essais de Théodicée*, art. 348; письмо къ Faucher; *Journal des Savants*, 1692; письмо къ Вариньону, также 1702 г. *Nouveaux essais sur l'entendement humain*, p. 11; *Recueil de diverses pièces* de Leibnitz, Clarke, Newton etc. 3 ed. in—8°, 1759, t. II, p. 450; и пр.).

[277]) *Nouvelles de la République des Lettres*, Mai 1687.

[278]) *Commercium epist*. Лейбница и Бернулли, t. II, стр. 110.

Traité du calcul différentiel et integral по поводу второй теоремы двѣнадцатой книги элементовъ Евклида, гдѣ доказывается, что площади круговъ относятся между собою, какъ квадраты діаметровъ. „Въ предыдущей теоремѣ, говоритъ Лакруа, Евклидъ доказываетъ, что это отношеніе одинаково съ отношеніемъ подобныхъ многоугольниковъ, вписанныхъ въ два различные круга; и мнѣ кажется очевиднымъ, что геометръ, открывшій эту истину, кто бы онъ ни былъ, долженъ былъ замѣтить независимость ея отъ числа сторонъ многоугольника и, видя въ то же время, что многоугольники тѣмъ менѣе отличаются отъ круговъ, чѣмъ болѣе имѣютъ сторонъ, онъ необходимо долженъ былъ изъ этого *по закону непрерывности* заключить, что свойство первыхъ принадлежитъ и вторымъ“.

Путемъ подобныхъ же соображеній Архимедъ достигъ до болѣе трудныхъ предложеній, напр. до отношенія между поверхностями и объемами цилиндра и конуса, до квадратуры параболы и т. п. Въ настоящее время мы сочли бы допускаемыя при этомъ предложенія достаточно доказанными, но древніе пользовались закономъ непрерывности только какъ путемъ къ изобрѣтенію, но не считали его достаточнымъ, какъ средство при доказательствахъ, и часто прибѣгали къ весьма труднымъ оборотамъ, чтобы дойти до вполнѣ убѣдительнаго доказательства истины, доказательства, противъ котораго нельзя бы было сдѣлать никакого возраженія Но со времени Лейбница начало непрерывности признается и постоянно употребляется, какъ математическая аксіома. На этомъ началѣ основывается способъ предѣловъ и послѣднихъ отношеній. Впрочемъ геометры пользуются имъ обыкновенно неявнымъ образомъ, не ссылаясь на него, какъ на абсолютный законъ, какимъ признавалъ его Лейбницъ.

Нельзя не сознаться, что именно этому отступленію отъ строгости древнихъ новѣйшая геометрія обязана своими неизмѣримыми успѣхами. Древніе, заботясь болѣе объ убѣдительности, нежели о ясности, скрывали всѣ нити, кото-

рыя могли бы навести на слѣдъ ихъ способовъ открытія истинъ и которыя могли бы служить руководствомъ для продолжающихъ ихъ изслѣдованія. Это было причиною медленности и затруднительности ихъ успѣховъ въ геометріи и недостаточной связи между пріемами для задачъ одного рода, или, говоря вѣрнѣе, причиною совершеннаго недостатка въ такихъ способахъ, которые бы, какъ въ новѣйшей геометріи, примѣнялись къ цѣлому разряду задачъ, представляющихъ значительную степень общности.

ПРИМѢЧАНІЕ XXV.

(Пятая эпоха, n° 15.)

Приложеніе начала случайныхъ соотношеній къ опредѣленію по величинѣ и направленію трехъ главныхъ осей эллипсоида по тремъ даннымъ сопряженнымъ діаметрамъ его.

Сначала мы рѣшимъ соотвѣтственную задачу на плоскости, т.-е. опредѣлимъ по величинѣ и направленію двѣ главныя оси эллипса по двумъ даннымъ сопряженнымъ діаметрамъ его. Рѣшеніе этой задачи облегчитъ намъ изъясненіе рѣшенія задачи въ пространствѣ и также будетъ служить примѣромъ приложенія и выгодъ начала случайныхъ соотношеній.

Задача: *Даны два сопряженные діаметра эллипса; требуется построить величину и направленіе двухъ главныхъ діаметровъ этой кривой.*

Положимъ сперва, что вмѣсто двухъ сопряженныхъ діаметровъ эллипса, намъ даны два сопряженные діаметра гиперболы и что намъ удалось построить главныя оси этой кривой; въ такомъ случаѣ одинъ изъ сопряженныхъ діаметровъ будетъ дѣйствительный и намъ дана его величина,— мы означимъ ее черезъ a,—другой же будетъ мнимый, опре-

дѣляемый даннымъ алгебраическимъ выраженіемъ $b.\sqrt{-1}$. Построеніе двухъ главныхъ осей гиперболы чрезвычайно просто; извѣстно, что если черезъ конецъ A полу-діаметра a проведемъ параллельную сопряженному діаметру, то эта линія будетъ касательная къ гиперболѣ; и что если на этой прямой по обѣ стороны отъ точки прикосновенія A отложимъ отрѣзки, равные b, то концы ихъ будутъ лежать на асимптотахъ. Поэтому, проведя двѣ асимптоты и раздѣливъ пополамъ оба дополнительные угла между ними, мы получимъ направленія двухъ главныхъ осей гиперболы. Такимъ образомъ задача рѣшается въ высшей степени просто.

Чтобы, на основаніи начала случайныхъ соотношеній, перенести это рѣшеніе на случай эллипса, мы должны случайныя части чертежа, которыми мы пользовались и которыя въ настоящемъ случаѣ были асимптоты, замѣнить, разсматривая другія свойства фигуры, такими, которыя имѣли бы мѣсто и въ случаѣ эллипса.

Примемъ двѣ точки, въ которыхъ касательная къ гиперболѣ пересѣкаетъ асимптоты, за фокусы коническаго сѣченія C, проходящаго черезъ центръ гиперболы; двѣ асимптоты будутъ радіусами-векторами этого коническаго сѣченія и, слѣдовательно, изъ двухъ главныхъ осей гиперболы, дѣлящихъ пополамъ два дополнительные угла между радіусами-векторами,—одна будетъ касательная, а другая нормаль къ коническому сѣченію C. Мы можемъ поэтому сказать, что это коническое сѣченіе C, проходящее черезъ центръ гиперболы, касается одной изъ ея главныхъ осей. Благодаря этому свойству, коническое сѣченіе C можетъ служить для построенія направленія главныхъ осей гиперболы и замѣнить собою для этой цѣли асимптоты, которыми мы пользовались прежде.

Но коническое сѣченіе C, къ которому привело насъ разсмотрѣніе асимптотъ, можетъ быть построено безъ помощи этихъ прямыхъ; дѣйствительно, мы знаемъ въ немъ направленіе главныхъ осей, такъ какъ онѣ суть касательная и

нормаль гиперболы въ точкѣ A, и эксцентрицитетъ по направленію касательной, который равенъ b, т.-е. равенъ діаметру гиперболы $b.\sqrt{-1}$, раздѣленному на $\sqrt{-1}$. Другой эксцентрицитетъ коническаго сѣченія C направленъ по нормали и равенъ первому, помноженному на $\sqrt{-1}$, т.-е. равенъ $b\sqrt{-1}$ [279]). Такимъ образомъ мы получаемъ слѣдующую теорему.

Если примемъ касательную и нормаль гиперболы въ точкѣ A за главныя оси коническаго сѣченія, проходящаго черезъ центръ гиперболы и эксцентрицитетъ котораго по направленію нормали равенъ діаметру, сопряженному съ діаметромъ, проходящимъ черезъ точку A, то это коническое сѣченіе будетъ необходимо касаться одной изъ главныхъ осей гиперболы.

Теорема эта выражаетъ общее свойство гиперболы, независимое отъ асимптотъ, хотя онѣ и служили намъ для доказательства. Всѣ части чертежа, о которыхъ упоминается въ этомъ общемъ свойствѣ, существуютъ и въ эллипсѣ; поэтому мы, пользуясь началомъ случайныхъ соотношеній, можемъ распространить то же свойство и на эллипсъ, т.-е. сказать:

Если касательная и нормаль въ какой-нибудь точкѣ эллипса разсматриваются какъ главныя оси коническаго сѣченія, которое проходитъ черезъ центръ эллипса и котораго эксцентрицитетъ по направленію нормали равенъ діаметру, сопряженному съ діаметромъ, проходящимъ черезъ взятую на эллипсѣ точку, то это коническое сѣченіе будетъ касаться одной изъ главныхъ осей эллипса.

Эксцентрицитетъ, взятый по нормали, будетъ здѣсь дѣйствительный, потому что таковъ діаметръ, которому онъ равенъ; слѣдовательно фокусы коническаго сѣченія будутъ

---

[279]) Мы допускаемъ, что коническое сѣченіе имѣетъ четыре фокуса, изъ которыхъ два дѣйствительные и два мнимые, и два эксцентрицитета: дѣйствительный и мнимый; квадраты этихъ двухъ эксцентрицитетовъ равны, но съ противоположными знаками.

лежать на нормали эллипса. Радіусы—векторы, проведенные изъ этихъ фокусовъ къ центру эллипса, образуютъ равные углы съ тою изъ главныхъ осей, которая касается къ коническому сѣченію. Отсюда мы выводимъ такую теорему:

Если на нормали въ извѣстной точкѣ эллипса отложимъ по обѣ стороны отъ этой точки отрѣзки, равные половинѣ діаметра, сопряженнаго съ діаметромъ, проходящимъ черезъ ту же точку, и концы этихъ отрѣзковъ соединимъ съ центромъ эллипса двумя прямыми, то эти прямыя будутъ одинаково наклонены къ одной изъ главныхъ осей эллипса.

Эта теорема доставляетъ, какъ мы видимъ, чрезвычайно простое построеніе направленія главныхъ осей эллипса, когда извѣстны два его сопряженные діаметра. Остается еще опредѣлить длину главныхъ осей и это можетъ быть выполнено различными способами.

Вопервыхъ, можно, опуская перпендикуляры, проложить два данные сопряженные полудіаметра на направленія главныхъ осей; тогда сумма квадратовъ проложеній будетъ равна квадрату главной полуоси.

Можно также воспользоваться слѣдующей теоремой, которую легко доказать:

Если черезъ точку коническаго сѣченія проведемъ нормаль, то произведеніе отрѣзковъ, образуемыхъ на ней перпендикулярнымъ къ ней діаметромъ и одною изъ главныхъ осей, будетъ равно квадрату другой полуоси.

Изъ этого соотношенія опредѣляются обѣ главныя оси.

Но можно еще получить выраженіе для длины осей, не зная *a priori* ихъ направленія.

Для этого замѣтимъ слѣдующее: когда на касательной и нормали коническаго сѣченія, какъ на главныхъ осяхъ, мы строимъ второе коническое сѣченіе, проходящее черезъ центръ перваго и касающееся въ этой точкѣ его главной оси, то произведеніе отрѣзковъ,—образуемыхъ на нормали перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ центра перваго кони-

ческаго сѣченія и главною осью, касательною ко второму коническому сѣченію,—равно квадрату главной полуоси втораго коническаго сѣченія, направленной по нормали. Эта главная ось будетъ, слѣдовательно, равна второй главной оси перваго коническаго сѣченія, т.-е. той, которая нормальна ко второму коническому сѣченію. Такимъ образомъ получаемъ теорему:

Если примемъ касательную и нормаль въ какой-нибудь точкѣ коническаго сѣченія за главныя оси втораго коническаго сѣченія, проходящаго черезъ центръ перваго и нормальнаго въ этой точкѣ къ одной изъ его главныхъ осей, то главная ось втораго коническаго сѣченія, направленная по нормали перваго, будетъ равна главной оси перваго коническаго сѣченія, которая нормальна ко второму, т.-е. одна изъ осей каждаго изъ такихъ коническихъ сѣченій нормальна къ другому коническому сѣченію и двѣ эти оси равны между собою.

Если первое коническое сѣченіе есть эллипсъ, то, какъ мы видѣли, дѣйствительные фокусы втораго коническаго сѣченія будутъ лежать на нормали перваго; поэтому большая ось его будетъ также направлена по этой нормали и будетъ равна суммѣ или разности радіусовъ-векторовъ, проведенныхъ изъ фокусовъ къ центру даннаго эллипса; но эта ось равна также главной оси эллипса, нормальной ко второму коническому сѣченію, поэтому мы приходимъ къ слѣдующему весьма простому построенію предложенной задачи:

Черезъ конецъ А одного изъ сопряженныхъ полудіаметровъ проводимъ перпендикуляръ ко второму и откладываемъ на немъ отъ точки А два отрѣзка, равные второму полудіаметру; соединяемъ концы этихъ отрѣзковъ съ центромъ кривой помощію двухъ прямыхъ и дѣлимъ пополамъ оба дополнительные угла между ними посредствомъ двухъ новыхъ прямыхъ; эти послѣднія прямыя представляютъ направленія главныхъ осей эллипса, сумма же и разность первыхъ прямыхъ представляютъ длину большой и малой оси.

Вторая часть этого рѣшенія, относящаяся къ длинѣ осей, представляетъ построеніе двухъ корней, которые получаются при аналитическомъ рѣшеніи этой задачи, но которые не были еще построены такъ просто.

Путь, которому мы слѣдовали, можетъ показаться длиннымъ, потому что мы, желая показать приложеніе начала случайныхъ соотношеній, принуждены были идти шагъ за шагомъ и приводить всѣ вспомогательныя теоремы, которыя были необходимы для того, чтобы ясно показать переходъ отъ случайнаго къ абсолютному въ свойствахъ фокусовъ. Но въ этомъ вообще нѣтъ необходимости при употребленіи этого начала, когда оно уже достаточно усвоено. Задачу въ пространствѣ мы будемъ уже рѣшать короче, хотя она въ сравненіи съ первой и представляетъ нѣкоторыя новыя трудности.

Задача: *По даннымъ тремъ сопряженнымъ діаметрамъ эллипсоида требуется опредѣлить величину и направленіе главныхъ осей этой поверхности.*

Представимъ себѣ гиперболоидъ съ одною полостью и его асимптотическій конусъ. Касательная плоскость къ гиперболоиду въ точкѣ m пересѣкаетъ конусъ по гиперболѣ Σ, квадраты діаметровъ которой равны, за исключеніемъ знака, квадратамъ параллельныхъ имъ діаметровъ гиперболоида [280]).

Примемъ эту гиперболу за *кривую эсцентрицитетовъ* [281]) поверхности втораго порядка, проходящей черезъ центръ гиперболоида.

---

[280]) Это слѣдуетъ изъ того, что діаметръ гиперболы есть часть касательной гиперболоида, заключающаяся между двумя образующими асимптотическаго конуса, и квадратъ этой части равенъ, помимо знака, квадрату параллельнаго ей діаметра гиперболоида, такъ какъ плоскость, проходящая черезъ касательную и черезъ этотъ діаметръ, пересѣкаетъ гиперболоидъ по гиперболѣ.

[281]) Для пониманія послѣдующаго необходимо принимать въ соображеніе изложенное въ Примѣчаніи XXXI, гдѣ объяснено, что мы разумѣемъ подъ *кривыми эксцентрицитетовъ* въ поверхностяхъ втораго порядка и гдѣ показаны различныя свойства этихъ кривыхъ.

Поверхность эта будетъ нормальна къ одной изъ главныхъ осей [282]). конуса, которыя одинаковы съ осями гиперболоида. Но одна изъ главныхъ осей этой поверхности направлена по нормали къ гиперболоиду въ точкѣ *m*, двѣ же другія по главнымъ діаметрамъ коническаго сѣченія Σ, т.-е. по касательнымъ къ кривымъ кривизны гиперболоида. Такимъ образомъ, отвлекаясь отъ асимптотическаго конуса, мы можемъ высказать слѣдующую теорему:

Если въ какой-нибудь точкѣ гиперболоида съ одною полостью проведемъ нормаль и касательныя къ линіямъ кривизны и эти три прямыя примемъ за три главныя оси поверхности втораго порядка, проходящей черезъ центръ гиперболоида и нормальной въ этой точкѣ къ одной изъ его главныхъ осей, то квадраты діаметровъ кривой эксцентрицитетовъ, взятой въ касательной плоскости гиперболоида, равны по величинѣ квадратамъ параллельныхъ съ ними діаметровъ гиперболоида, но знаки имѣютъ противоположные.

При помощи начала случайныхъ соотношеній мы можемъ примѣнить эту теорему къ двумъ другимъ поверхностямъ, имѣющимъ центръ; для эллипсоида будемъ имѣть:

Если нормаль въ какой-нибудь точкѣ m эллипсоида и двѣ касательныя къ линіямъ кривизны въ этой же точкѣ будемъ разсматривать, какъ три главныя оси поверхности втораго порядка, проходящей черезъ центръ эллипсоида и имѣющей нормалью въ этой точкѣ одну изъ трехъ главныхъ осей эллипсоида, то квадраты діаметровъ кривой эксцентрицитетовъ этой поверхности въ плоскости касательной къ эллипсоиду будутъ равны, но противоположны по знаку съ квадратами параллельныхъ имъ діаметровъ эллипсоида.

Эта кривая эксцентрицитетовъ будетъ мнимая, но, не смотря на это, она можетъ служить къ опредѣленію двухъ другихъ, дѣйствительныхъ.

---

[282]) См. Примѣчаніе XXXI, n° 11.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $-b^2$ и $-c^2$ будутъ квадраты двухъ главныхъ полуосей этой кривой (черезъ b и c мы означаемъ двѣ главныя полуоси кривой пересѣченія эллипсоида плоскостію, параллельною касательной плоскости, проведенной черезъ m); положимъ, что b болѣе c; тогда $-c^2$ будетъ болѣе $-b^2$ и фокусы мнимаго коническаго сѣченія будутъ лежать на оси c. На нормали эллипсоида отложимъ отъ точки m отрѣзки равные b и c. Въ плоскости, опредѣляемой этою нормалью и линіею параллельною оси c, опишемъ эллипсъ, котораго большая полуось равнялась бы b, а эксцентрицитетъ былъ бы равенъ c. Потомъ въ плоскости, опредѣляемой нормалью и линіею, параллельной оси b, опишемъ гиперболу, имѣющую дѣйствительною полуосью отрѣзокъ c и эксцентрицитетомъ—отрѣзокъ b.

Построенные такимъ образомъ эллипсъ и гипербола и будутъ искомыя кривыя, т.-е. двѣ кривыя эксцентрицитетовъ поверхности втораго порядка, проходящей черезъ центръ эллипсоида и имѣющей нормалью въ этой точкѣ одну изъ главныхъ осей его. Слѣдовательно эта главная ось эллипсоида будетъ общею главною осью двухъ конусовъ, имѣющихъ основаніями двѣ вышеупомянутыя кривыя эксцентрицитетовъ и общею вершиною—центръ эллипсоида (Примѣмѣчаніе XXXI, n^0 11). Двѣ другія общія главныя оси этихъ конусовъ будутъ опять ничто иное, какъ двѣ остальныя главныя оси эллипсоида, потому что черезъ центръ его можно провести двѣ другія поверхности втораго порядка, имѣющія тѣ же кривыя эксцентрицитетовъ и послѣдовательно нормальныя къ этимъ двумъ остальнымъ главнымъ осямъ эллипсоида. Вопросъ о построеніи направленія трехъ главныхъ осей эллипсоида приводится такимъ образомъ къ нахожденію трехъ общихъ главныхъ осей двухъ конусовъ, опирающихся на двѣ вышеупомянутыя кривыя эксцентрицитетовъ. Въ каждомъ изъ конусовъ эти три главныя оси представляютъ систему сопряженныхъ осей; поэтому мы должны только найти такую систему сопряженныхъ осей, которая принадлежала бы обоимъ конусамъ.

Отсюда заключаемъ:

Чтобы найти по тремъ даннымъ сопряженнымъ діаметрамъ направленіе трехъ главныхъ осей эллипсоида, проводимъ черезъ конецъ A одного изъ данныхъ діаметровъ перпендикуляръ къ плоскости двухъ другихъ и откладываемъ на немъ отъ точки A два отрѣзка соотвѣтственно равные двумъ главнымъ полуосямъ эллипса, построеннаго на двухъ остальныхъ сопряженныхъ діаметрахъ. Пусть b будетъ большая, а c — меньшая изъ этихъ полуосей. Черезъ нормаль проводимъ двѣ плоскости, изъ которыхъ одна параллельна діаметру 2c, а другая—діаметру 2b. Въ первой плоскости строимъ эллипсъ съ большою полуосью b и эксцентрицитетомъ c, во второй же плоскости гиперболу съ главною полуосью c и эксцентрицитетомъ b. Разсматриваемъ центръ эллипсоида, какъ общую вершину двухъ конусовъ, для которыхъ вышеупомянутые эллипсъ и гипербола служатъ основаніями. Эти конусы будутъ пересѣкаться по четыремъ образующимъ лежащимъ по двѣ въ шести плоскостяхъ. Плоскости эти пересѣкаются попарно въ трехъ другихъ прямыхъ, которыя и будутъ три главныя оси эллипсоида.

Для опредѣленія длины главныхъ осей можно проложить на ихъ направленія три данные сопряженные діаметра; тогда квадратъ каждой оси будетъ равенъ суммѣ квадратовъ проложеній на нее.

Но проще возпользоваться слѣдующей теоремой, которую легко доказать:

Нормаль въ какой-нибудь точкѣ m поверхности втораго порядка встрѣчается съ перпендикулярною къ ней діаметральною плоскостью и съ одной изъ главныхъ плоскостей P въ двухъ точкахъ, произведеніе разстояній которыхъ отъ точки m равно квадрату полуоси перпендикулярной къ главной плоскости P.

Можно также, не зная направленія главныхъ осей эллипсоида, опредѣлить длины ихъ при помощи трехъ поверхно-

стей, которыхъ большія оси равны соотвѣтственно тремъ искомымъ главнымъ осямъ. Докажемъ теорему, на которой это основывается.

Для поверхности, главныя оси которой суть нормаль и двѣ касательныя къ линіямъ кривизны въ точкѣ m и которая проходитъ черезъ центръ эллипсоида, касаясь въ этой точкѣ одной изъ главныхъ плоскостей его, для этой поверхности, говорю я, квадратъ полуоси, направленной по нормали, равенъ произведенію отрѣзковъ, образуемыхъ на этой нормали, считая отъ точки m, главною плоскостью и діаметрально плоскостью, перпендикулярной къ той же нормали [283]). Поэтому, на основаніи предыдущей теоремы, эта ось поверхности равна той оси эллипсоида, которая перпендикулярна къ упомянутой главной плоскости; и мы получаемъ такую теорему:

Если двѣ поверхности втораго порядка таковы, что каждая изъ нихъ проходитъ черезъ центръ другой и три главныя оси каждой направлены по нормали и по двумъ касательнымъ къ линіямъ кривизны другой, то ось первой поверхности, направленная по нормали ко второй, будетъ равна той оси второй поверхности, которая направлена по нормали къ первой.

Отсюда заключаемъ:

Если нормаль въ какой-нибудь точкѣ поверхности втораго порядка и касательныя къ двумъ линіямъ кривизны въ этой точкѣ будемъ разсматривать какъ три общія главныя оси трехъ поверхностей, проходящихъ черезъ центръ данной и касающихся соотвѣтственно трехъ главныхъ плоскостей ея, то главныя оси этихъ трехъ поверхностей,

---

[283]) Это проистекаетъ изъ слѣдующей теоремы элементарной теоріи поверхностей втораго порядка: „Касательная плоскость въ какой-нибудь точкѣ поверхности и плоскость, проведенная черезъ эту точку перпендикулярно къ одному изъ главныхъ діаметровъ, образуютъ на этомъ діаметрѣ, считая отъ центра поверхности, два отрѣзка, произведеніе которыхъ равно квадрату полудіаметра“.

лежащія по направленію нормали данной, будутъ послѣдовательно равны тремъ главнымъ осямъ ея.

Если данная поверхность есть эллипсоидъ, данный только посредствомъ трехъ его сопряженныхъ діаметровъ, то мы видѣли, какъ опредѣляются общія линіи эксцентрицитетовъ для трехъ остальныхъ поверхностей, что достаточно для построенія ихъ. Такимъ образомъ послѣдняя теорема можетъ служить къ рѣшенію задачи: найти величину трехъ главныхъ діаметровъ эллипсоида, не зная направленія ихъ. Но этотъ способъ рѣшенія былъ бы труденъ и мало удобенъ на практикѣ. Не смотря на это, намъ кажется, что теорема, служащая ему основаніемъ, заслуживаетъ вниманія, потому что ею выражается прекрасное общее свойство поверхностей втораго порядка.

Предыдущія теоремы безъ труда ведутъ ко многимъ другимъ, не лишеннымъ интереса.

Черезъ конецъ m одного изъ сопряженныхъ діаметровъ проведемъ двѣ прямыя равныя и параллельныя двумъ другимъ сопряженнымъ діаметрамъ и опишемъ эллипсъ E, которому онѣ служили бы сопряженными діаметрами. Конусъ, вершина котораго лежитъ въ центрѣ эллипсоида и основаніемъ которому служитъ этотъ эллипсъ, пересѣчется съ эллипсоидомъ по другому эллипсу E', плоскость котораго параллельна плоскости перваго. Эти два эллипса подобны и подобно расположены. Второй изъ нихъ имѣетъ центръ на діаметрѣ, проходящемъ черезъ точку m. Означая его центръ черезъ m', легко найдемъ $Om = Om'.\sqrt{3}$.

Второй эллипсъ имѣетъ то свойство, что если возьмемъ на немъ три точки A', B', C', центръ среднихъ разстояній которыхъ находится въ центрѣ эллипса, то три прямыя OA', OB', OC', будутъ сопряженные діаметры эллипсоида. Это свойство поверхностей втораго порядка доказать нетрудно.

Разсмотримъ теперь точки m и m', какъ соотвѣтственныя относительно *центра подобія* O, и возьмемъ три поверхности подобныя и подобно расположенныя съ тремя поверхно-

стями предыдущей теоремы, имѣющими общій центръ въ точкѣ m, проходящими черезъ центръ O эллипсоида и послѣдовательно нормальными къ тремъ главнымъ осямъ его. Три главныя поверхности будутъ имѣть *центръ фигуры* въ m'; будутъ проходить черезъ *центръ подобія* O; будутъ въ этой точкѣ касаться трехъ первыхъ поверхностей и, слѣдовательно, будутъ послѣдовательно нормальны къ тремъ главнымъ осямъ эллипсоида; всѣ три, наконецъ, будутъ имѣть одинаковыя линіи эксцентрицитетовъ въ плоскостяхъ, параллельныхъ съ плоскостями, въ которыхъ находятся кривыя эксцентрицитетовъ трехъ первыхъ поверхностей.

Пусть b и c будутъ главныя полуоси коническаго сѣченія E, также b' и c' главныя полуоси коническаго сѣченія E'. Послѣднія будутъ параллельны первымъ и мы будемъ имѣть:

$$b' = \frac{b}{\sqrt{3}},\ c' = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

Поэтому, чтобы получить кривыя эксцентрицитетовъ для трехъ новыхъ поверхностей, мы должны изъ центра коническаго сѣченія E' возставить перпендикуляръ къ его плоскости, отложить на немъ два отрѣзка, равные b' и c' и въ двухъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостяхъ, проходящихъ черезъ нормаль и черезъ оси b' и c', описать соотвѣтственно эллипсъ и гиперболу, при чемъ эллипсъ долженъ имѣть бульшую полуось b' и эксцентрицитетъ c', гипербола же поперечную полуось c' и эксцентрицитетъ b'. Этотъ эллипсъ и эта гипербола будутъ кривыя эксцентрицитетовъ трехъ поверхностей.

Главныя оси конусовъ, имѣющихъ вершиною точку O и основаніями эти кривыя эксцентрицитетовъ, будутъ направлены по главнымъ осямъ эллипсоида.

Отсюда проистекаетъ слѣдующая теорема:

Для опредѣленія по величинѣ и направленію главныхъ осей эллипсоида по тремъ даннымъ сопряженнымъ діаметрамъ его OA, OB, OC, *мы находимъ сначала величину и*

направленіе главныхъ полуосей эллипса, проходящаго черезъ три точки A, B, C, и имѣющаго центръ въ центрѣ среднихъ разстояній этихъ точекъ. Пусть b и c будутъ эти двѣ главныя полуоси. Изъ центра эллипса возставляемъ къ его плоскости перпендикуляръ и откладываемъ на немъ отрѣзки b' и c', равные b и c. Въ двухъ взаимно перпендикулярныхъ плоскостяхъ, проходящихъ черезъ этотъ перпендикуляръ и черезъ оси b и c, описываемъ два коническія сѣченія, именно: эллипсъ, имѣющій большую полуось b' и эксцентрицитетъ c', и гиперболу съ дѣйствительною полуосью c' и эксцентрицитетомъ b'. Тогда:

1) Два конуса, общая вершина которыхъ находится въ точкѣ O и основаніями которымъ служатъ эти эллипсъ и гипербола, будутъ имѣть тѣ же главныя оси, какъ и эллипсоидъ; и

2) Три большія оси трехъ поверхностей, для которыхъ эти эллипсъ и гипербола служатъ кривыми эксцентрицитетовъ и которыя проходятъ черезъ центръ эллипсоида, будутъ равны тремъ главнымъ осямъ эллипсоида, раздѣленнымъ на $\sqrt{3}$.

Теорема эта представляетъ, какъ мы видимъ, второе рѣшеніе задачи объ опредѣленіи по величинѣ и направленію трехъ главныхъ осей эллипсоида, когда даны три его сопряженные діаметра. Рѣшеніе это столь же просто, какъ и первое, но оно имѣетъ то преимущество, что изъ него выводятся различныя слѣдствія, которыхъ первое рѣшеніе не доставляло. Такъ напримѣръ, изъ него непосредственно заключаемъ:

Если три сопряженные діаметра эллипсоида должны оканчиваться въ трехъ данныхъ точкахъ и одна изъ главныхъ осей его должна имѣть данную длину, то центръ такого эллипсоида остается неопредѣленнымъ и геометрическое мѣсто его есть поверхность втораго порядка, центръ которой находится въ центрѣ среднихъ разстояній тѣхъ трехъ точекъ, которыя должны быть концами трехъ сопряженныхъ діаметровъ эллипсоида.

Можно дать длины двухъ главныхъ осей эллипсоида и центръ его все еще будетъ неопредѣленъ; тогда геометрическимъ мѣстомъ его будетъ кривая двоякой кривизны, происходящая отъ пересѣченія двухъ поверхностей втораго порядка, имѣющихъ одинаковыя кривыя эксцентрицитетовъ. Эта кривая пересѣченія будетъ *линіею кривизны* обѣихъ поверхностей.

Если даны величины всѣхъ трехъ главныхъ діаметровъ эллипсоида, то задачѣ удовлетворяютъ восемь эллипсоидовъ, центры которыхъ суть общія точки трехъ поверхностей, имѣющихъ однѣ и тѣже кривыя эксцентрицитетовъ.

Что касается направленія главныхъ діаметровъ эллипсоида, то мы имѣемъ такую теорему:

Если требуется, чтобы три сопряженные діаметра эллипсоида оканчивались въ трехъ данныхъ точкахъ, то, въ какой бы точкѣ пространства ни находился центръ этой поверхности, три ея главныя оси будутъ одинаковы съ тремя общими главными осями двухъ конусовъ, вершина которыхъ находится въ этомъ центрѣ, основаніями же которымъ служатъ два неизмѣнныя коническія сѣченія, построеніе которыхъ зависитъ только отъ положенія трехъ данныхъ точёкъ.

Эти два коническія сѣченія имѣютъ то свойство, что всякій конусъ, имѣющій одно изъ нихъ основаніемъ, а точку другаго — вершиною, есть конусъ вращенія: эллипсоидъ, центръ котораго находится въ вершинѣ такаго конуса, будетъ также эллипсоидъ вращенія. Такимъ образомъ получаемъ слѣдующую теорему:

Если требуется найти эллипсоидъ вращенія, три сопряженные діаметра котораго оканчивались бы въ трехъ данныхъ точкахъ, то этому требованію удовлетворяетъ безчисленное множество эллипсоидовъ. Ихъ центры лежатъ на двухъ коническихъ сѣченіяхъ, эллипсѣ и гиперболѣ, которыя помѣщены въ двухъ взаимно перпендикулярныхъ плоскостяхъ и таковы, что вершины и фокусы одного служатъ фокусами и вершинами другаго.

ПРИМѢЧАНІЕ XXVI

(*Пятая эпоха, n° 17.*)

О мнимомъ количествѣ въ геометріи.

Изслѣдованіе случайныхъ соотношеній и свойствъ фигуры, или геометрической системы, весьма удобно для объясненія слова *мнимый*, которое очень часто и съ успѣхомъ употребляется въ настоящее время при чисто—геометрическихъ изысканіяхъ.

Дѣйствительно, выраженіе *мнимый* можно понимать такъ, какъ будто бы имъ обозначается только извѣстное состояніе фигуры, при которомъ въ ней перестаютъ существовать нѣкоторыя части, бывшія дѣйствительными при другомъ состояніи. Въ самомъ дѣлѣ, о мнимомъ предметѣ нельзя себѣ составить никакого понятія иначе, какъ представляя себѣ въ тоже время въ пространствѣ предметъ въ состояніи дѣйствительнаго существованія; понятіе о *мнимомъ* не имѣло бы смысла, если бы не сопровождалось мыслію о дѣйствительномъ существованіи того предмета, къ которому мы прилагаемъ это понятіе. Но таковы именно соотношенія и свойства, которыя мы назвали *случайными* и которыя даютъ ключъ къ *мнимымъ* въ геометріи.

Изъ этого видно, что легко бы можно было, если бы мы захотѣли, избѣжать при разсужденіяхъ употребленія мнимыхъ; для этого достаточно, рядомъ съ фигурой, на которой доказывается какое-нибудь свойство, разсматривать другую фигуру того же рода, но въ состояніи большей общности построенія, такую, чтобы въ ней были дѣйствительными тѣ части, которыя въ данной фигурѣ оказываются мнимыми. Собственно это именно мы и дѣлаемъ, когда разсуждаемъ о мнимыхъ предметахъ, какъ о дѣйствительныхъ; по этому можно сказать, что употребленіе слова мнимый есть сокращенный способъ выраженія и что словомъ этимъ указы-

вается, что предлагаемое сужденіе относится къ другому общему состоянію фигуры, въ которой части, составляющія предметъ сужденія, существуютъ дѣйствительно, а не мнимы, какъ въ данной фигурѣ. И такъ какъ, на основаніи принципа случайныхъ соотношеній, или, если угодно, начала непрерывности, истины, доказанныя для одногоизъ двухъ общихъ состояній фигуры, прилагаются также и ко второму состоянію, то мы видимъ, что употребленіе и разсмотрѣніе мнимыхъ въ геометріи совершенно оправдывается.

Здѣсь должны мы сдѣлать одно важное замѣчаніе.

Когда дана фигура, въ которой есть мнимыя части, то мы всегда можемъ, какъ было сказано, вообразить себѣ другую фигуру, столь же общую по построенію, но въ которой части, бывшія прежде мнимыми, будутъ дѣйствительными; но нельзя (въ этомъ то и состоитъ наше замѣчаніе) разсуждать, или производить построенія на самой данной фигурѣ, разсматривая, какъ дѣйствительныя, тѣ ея части, которыя даны мнимыми. Если, напримѣръ, путемъ вычисленія получается для опредѣленія положенія точки на прямой мнимое выраженіе, то мы сдѣлали бы весьма большую ошибку, если бы вздумали построить искомую точку, какъ будто бы выраженіе для нея было дѣйствительное. Построенная подобнымъ образомъ точка не относилась бы ни къ чертежу, ни къ разсматриваемой задачѣ, и всѣ результаты, выведенные изъ разсмотрѣнія этой точки, были бы ложны.

Такъ, въ случаѣ сопряженныхъ діаметровъ гиперболы, оба діаметра каждой пары имѣютъ дѣйствительныя направленія, но длина одного изъ нихъ всегда мнимая. Квадратъ ея есть величина дѣйствительная и потому всѣ общія свойства эллипса, въ которыхъ входятъ только квадраты сопряженныхъ діаметровъ, будутъ примѣняться къ гиперболѣ, какъ и къ эллипсу; но тѣ свойства, въ которыя входятъ первыя степени этихъ величинъ, не будутъ уже примѣнимы къ гиперболѣ, потому что, желая построить мнимую ось гиперболы, какъ будто бы она была дѣйствительная, мы впали бы въ ошибку. Построенная такимъ образомъ линія и ея конецъ

не относились бы къ данной задачѣ и фигурѣ, а принадлежали бы другой фигурѣ и другой задачѣ.

Интересно бы было изслѣдовать соотношенія и взаимную зависимость между свойствами двухъ фигуръ, изъ которыхъ въ одной построены, какъ дѣйствительныя, тѣ части, которыя въ другой даны мнимыми [284]). Таковы равносторонняя гипербола и кругъ, построенный на ея главной оси, какъ на діаметрѣ. Каждая хорда круга, перпендикулярная къ этой оси, имѣетъ дѣйствительный квадратъ; если основаніе перпендикуляра лежитъ на оси внутри круга, то и длина хорды будетъ дѣйствительная; если же основаніе перпендикуляра падаетъ внѣ круга, то и длина хорды будетъ мнимая, хотя квадратъ ея и дѣйствительный. Если мы построимъ ее, принимая за дѣйствительную, то конецъ ея опредѣлитъ точку, принадлежащую равносторонней гиперболѣ. И хорда эта будетъ имѣть различныя свойства, смотря потому, будетъ ли она принадлежать кругу, или гиперболѣ. Такъ напримѣръ, въ кругѣ прямыя, соединяющія конецъ хорды съ двумя концами діаметра, образуютъ между собою прямой уголъ, тогда какъ въ гиперболѣ эти прямыя наклонены другъ къ другу подъ перемѣннымъ угломъ.

Уже Карно, въ *Traite' de la Corrélation des figures de Géometrie* и въ *Géometrie de position*, высказалъ нѣсколько соображеній о соотвѣтствіи фигуръ, о которыхъ мы говоримъ, и объ алгебраическихъ выраженіяхъ, соотвѣтствующихъ имъ въ анализѣ; но главный предметъ трудовъ знаменитаго геометра въ этомъ направленіи составляло *соотвѣтствіе (Corrélation)* фигуръ, отличающихся между собою въ ихъ алгебраическихъ выраженіяхъ только простою перемѣною знака при самыхъ перемѣнныхъ, а не при функціяхъ ихъ, и потому соотношенія между фигурами, которыя, какъ мы сказали, отличаются тѣмъ, что въ однихъ строятся, какъ

[284]) Въ анализѣ это приводится къ тому, чтобы въ формулахъ, относящихся къ задачѣ перемѣнить въ извѣстныхъ членахъ $\sqrt{+1}$ на $\sqrt{-1}$, или общѣе замѣнить единицу однимъ изъ ея корней.

дѣйствительныя тѣ выраженія, которыя для другихъ суть мнимыя, эти соотношенія, говорю я, составляютъ предметъ совершенно новыхъ изысканій, которыя, какъ намъ кажется, могутъ вести къ нѣкоторымъ общимъ законамъ протяженія, способнымъ расширить значеніе геометрическихъ ученій.

По поводу этого предмета укажемъ еще на знаменитаго Ламберта, который въ значительной мѣрѣ и съ большимъ успѣхомъ пользовался мнимыми соотношеніями, проистекающими изъ сравненія равносторонней гиперболы съ кругомъ, имѣющимъ съ нею общій центръ. Онъ изобрѣлъ нѣчто въ родѣ гиперболической тригонометріи, при помощи которой находилъ дѣйствительныя рѣшенія въ тѣхъ случаяхъ, когда обыкновенная тригонометрія приводитъ къ мнимымъ величинамъ.

ПРИМѢЧАНІЕ XXVII.

(Пятая эпоха, nº 23.)

О происхожденіи теоріи взаимныхъ поляръ и словъ полюсъ и поляра.

Прежде всего Монжъ въ своей Начертательной Геометріи доказалъ, что если вершина конуса, описаннаго около поверхности втораго порядка, движется по плоскости, то плоскость кривой прикосновенія проходитъ постоянно черезъ одну и ту же точку; если же вершина конуса описываетъ прямую линію, то плоскость прикосновенія вращается около другой прямой; послѣ того Ливе и Бріаншонъ показали, что при движеніи вершины конуса по поверхности втораго порядка, плоскость прикосновенія огибаетъ другую поверхность втораго порядка. (*Journal de l'école polytechnique*, Cah. XIII, 1806).

Въ томъ же мемуарѣ Бріаншонъ пользуется этой теоріей для вывода изъ знаменитой теоремы Паскаля о шестиугольникѣ вписанномъ въ коническое сѣченіе своей прекрасной и не менѣе полезной теоремы о шестиугольникѣ, описан-

комъ около коническаго сѣченія, состоящей въ томъ, что *три діагонали, соединяющія противоположныя вершины такого шестиугольника, проходятъ черезъ одну точку.* Это былъ первый примѣръ подобнаго употребленія теоріи поляръ, и при этомъ обнаружилась весьма замѣчательнымъ образомъ *двойственность* плоскихъ фигуръ, вслѣдствіе аналогіи этой теоремы съ теоремою Паскаля.

Впослѣдствіи Encontre и Stainville воспользовались этою теоріею для преобразованія фигуръ. Задача заключалась въ томъ, чтобы описать около коническаго сѣченія многоугольникъ, вершины котораго лежали бы на данныхъ прямыхъ. Названные геометры замѣтили, что по теоріи *полюсовъ* задача эта приводится къ другой, рѣшеніе которой было уже извѣстно, именно къ построенію вписаннаго въ коническое сѣченіе многоугольника, стороны котораго проходили бы черезъ данныя точки. (*Annales des mathématiques*, t. I, p. 122 et 190) [285]).

Въ этомъ превосходномъ журналѣ, который уже 20 лѣтъ способствуетъ успѣхамъ математики и особенно геометріи, встрѣчаемъ въ первый разъ названія: *полюсъ, поляра, полярная плоскость,*—названія, которыя значительно облегчили употребленіе этой теоріи.

Сервуа первый назвалъ *полюсомъ* прямой точку, черезъ которую проходятъ всѣ хорды прикосновенія угловъ, описанныхъ около коническаго сѣченія и имѣющихъ вершины на этой прямой; потомъ Жергоннъ назвалъ эту прямую *полярою* точки и распространилъ эти названія на геометрію въ пространствѣ (*Annales des mathématiques*, t. I, p. 337 et t. III, p. 297). Они приняты всѣми геометрами, писавшими о поверхностяхъ втораго порядка.

---

[285]) Исторія этой задачи изложена нами въ Примѣчаніи XI.

ПРИМѢЧАНІЕ XXVIII.

(Пятая эпоха, n⁰ 27).

Обобщеніе теоріи стереографическихъ проэкцій.— Поверхности втораго порядка, касающіяся четырехъ другихъ.

Двѣ теоремы, употребляемыя въ теоріи стереографическихъ проэкцій, разсматриваемой какъ способъ изслѣдованія, замѣняются двумя слѣдующими въ такъ называемой нами обобщенной теоріи, гдѣ мѣсто глаза предполагается въ какой-нибудь точкѣ пространства:

Если сдѣлаемъ перспективу поверхности втораго порядка на какой-нибудь плоскости, помѣщая глазъ въ точкѣ, взятой произвольно внѣ поверхности, то

1) *Проэкціями плоскихъ кривыхъ, проведенныхъ по поверхности, будутъ коническія сѣченія, имѣющія двойное, дѣйствительное или мнимое, прикосновеніе съ однимъ и тѣмъ же коническимъ сѣченіемъ, представляющимъ кажущійся контуръ поверхности.*

2) *Полюсъ хорды прикосновенія каждаго коническаго сѣченія съ этимъ контуромъ будетъ проложеніемъ вершины конуса, прикасающагося къ поверхности по плоской кривой, проложеніе которой есть взятое коническое сѣченіе.*

Къ этимъ двумъ основнымъ предложеніямъ полезно прибавить еще слѣдующее третье:

Проложеніями двухъ взаимныхъ поляръ относительно поверхности будутъ двѣ прямыя, изъ которыхъ каждая проходитъ черезъ полюсъ другой, при чемъ полюсы ихъ берутся относительно контура.

Помощію этихъ трехъ теоремъ мы необыкновенно легко получаемъ весьма многія свойства системы коническихъ сѣченій, вписанныхъ въ одно и тоже коническое сѣченіе, и при этомъ, можно сказать, нѣтъ надобности ни въ какомъ

доказательствѣ, потому что достаточно обратить вниманіе на очевидныя свойства кривыхъ, проводимыхъ въ пространствѣ по поверхности втораго порядка, и эти свойства перенести на плоскость.

Отъ подобнаго изслѣдованія коническихъ сѣченій, описанныхъ въ одной плоскости, легко перейти къ такимъ же изслѣдованіямъ въ пространствѣ, т.-е. къ свойствамъ системы поверхностей втораго порядка, вписанныхъ въ поверхность того же порядка. Мы говоримъ, что поверхность вписана въ другую, когда обѣ поверхности на всемъ протяженіи соприкасаются по кривой линіи. Для поверхностей втораго порядка линія прикосновенія есть плоская кривая.

Такимъ путемъ можно придти ко многимъ свойствамъ поверхностей втораго порядка и къ рѣшенію большаго числа вопросовъ, относящихся къ прикосновенію этихъ поверхностей; при этомъ всѣ вопросы о прикосновеніи шаровъ являются простыми частными случаями. И геометры, которые любятъ возможно большую общность, оцѣнятъ въ этой теоріи особенно то обстоятельство, что всѣ, даже самые общіе, вопросы оказываются здѣсь слѣдствіями одного, который въ своемъ содержаніи и рѣшеніи обнимаетъ ихъ всѣ; вотъ этотъ вопросъ:

Задача.—*Даны четыре поверхности втораго порядка, вписанныя въ одну и ту же поверхность E втораго же порядка, требуется найти пятую поверхность того же порядка, которая касалась бы четырехъ первыхъ и была бы также вписана въ поверхность E.*

Рѣшеніе этой задачи очень просто; но, чтобы изложить его точно и изящно, считаемъ не лишнимъ предпослать нѣкоторыя опредѣленія.

Когда двѣ поверхности втораго порядка вписаны въ третью поверхность того же порядка, то онѣ пересѣкаются по двумъ плоскимъ кривымъ, которыя могутъ быть дѣйствительными или мнимыми, но плоскости которыхъ всегда дѣйствительны; по аналогіи съ *радикальною осью* двухъ коническихъ сѣ-

ченій *(axes de symptose)* мы назовемъ эти плоскости *радикальными плоскостями* двухъ поверхностей *(plans de symptose)*.

Двѣ такія поверхности обладаютъ еще тѣмъ свойствомъ, что около нихъ можно описать два конуса, которые опять могутъ сами быть дѣйствительные или мнимые, но вершины которыхъ всегда дѣйствительныя. Для обозначенія этихъ точекъ мы воспользуемся названіемъ *центровъ соотвѣтствія (centres d' homologie)*, употребленнымъ Понселе.

Далѣе, мы будемъ называть *радикальною прямою* (*droite de symptose*) двухъ поверхностей всякую прямую, лежащую въ одной изъ радикальныхъ плоскостей и *плоскостью соотвѣтствія (plan d' homologie)* — всякую плоскость, проходящую черезъ одинъ изъ центровъ соотвѣтствія.

Представимъ себѣ теперь три поверхности втораго порядка, вписанныя въ одну поверхность того же порядка; попарно взятыя онѣ будутъ имѣть по двѣ радикальныя плоскости, всего слѣдовательно—шесть.

Доказано, что *эти шесть плоскостей проходятъ, по три, черезъ четыре прямыя, пресѣкающіяся въ одной и той же точкѣ пространства;* такимъ образомъ шесть радикальныхъ плоскостей составляютъ четыре боковыя и двѣ діагональныя плоскости четыресторонней пирамиды.

Каждую изъ четырехъ прямыхъ, черезъ которыя проходятъ, по три, шесть радикальныхъ плоскостей, мы будемъ называть *общею* тремъ поверхностямъ *радикальною прямою* и каждую точку на этихъ прямыхъ — *общею радикальною точкою.*

Каждыя двѣ поверхности имѣютъ два центра соотвѣтствія, слѣдовательно три поверхности имѣютъ ихъ шесть.

Доказано, что *эти шесть центровъ соотвѣтствія лежатъ, по три, на четырехъ прямыхъ, которыя находятся въ одной плоскости,* такъ что шесть центровъ соотвѣтствія составляютъ четыре вершины и двѣ точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ четыреугольника.

Каждую прямую, на которой лежатъ три изъ шести центровъ соотвѣтствія, мы будемъ называть *общею линіею соот-*

вѣтствія трехъ поверхностей и каждую плоскость, проходящую черезъ одну изъ четырехъ такихъ линій—*общею плоскостью соотвѣтствія.*

Представимъ себѣ четыре поверхности втораго порядка, вписанныя въ одну поверхность того-же порядка; доказано, что *эти четыре поверхности имѣютъ восемь общихъ радикальныхъ точекъ*, т.-е., что въ пространствѣ существуетъ восемь точекъ, изъ которыхъ каждая лежитъ въ радикальной плоскости двухъ любыхъ поверхностей; такъ что каждая изъ этихъ восьми точекъ есть общая точка пересѣченія шести радикальныхъ плоскостей, которыхъ всего получимъ двѣнадцать, считая четыре поверхности попарно.

Доказывается также, что *четыре поверхности имѣютъ восемь общихъ плоскостей соотвѣтствія*, т.-е., что существуетъ восемь плоскостей, изъ которыхъ каждая проходитъ черезъ центръ соотвѣтствія двухъ любыхъ поверхностей. Каждая изъ такихъ плоскостей заключаетъ въ себѣ, слѣдовательно, шесть центровъ соотвѣтствія, которыхъ всего, при сочетаніи четырехъ поверхностей по двѣ, будетъ двѣнадцать.

Предпославъ все это, мы уже легко можемъ выразить рѣшеніе данной задачи.

Первое рѣшеніе. Построимъ для данныхъ четырехъ поверхностей восемь общихъ плоскостей соотвѣтствія и восемь общихъ радикальныхъ точекъ. Возьмемъ полюсы восьми плоскостей соотвѣтствія относительно одной какой-нибудь изъ поверхностей A и проведемъ прямыя изъ этихъ полюсовъ къ каждой изъ восьми радикальныхъ точекъ. Такимъ образомъ получимъ 64 прямыя, которыя пересѣкутся съ поверхностью A въ 128 точкахъ; каждая изъ этихъ точекъ будетъ точкою прикосновенія искомой поверхности съ поверхностію A.

Второе рѣшеніе. Построивъ, какъ и въ первомъ рѣшеніи, восемь общихъ радикальныхъ точекъ и восемь общихъ плоскостей соотвѣтствія четырехъ поверхностей, возьмемъ полярныя плоскости восьми радикальныхъ точекъ относительно какой-нибудь одной поверхности A. Каждая изъ этихъ по-

лярныхъ плоскостей пересѣчется съ восемью плоскостями соотвѣтствія по восьми прямымъ, такъ что всего получимъ 64 прямыя. Черезъ каждую изъ нихъ проведемъ двѣ касательныя плоскости къ поверхности A; каждая точка прикосновенія этихъ 128 касательныхъ плоскостей будетъ точкою прикосновенія искомой поверхности къ поверхности A.

Изъ обоихъ рѣшеній видимъ, что задача въ своей наибольшей общности допускаетъ 128 рѣшеній.

Для изслѣдованія весьма многочисленныхъ частныхъ случаевъ, заключающихся въ общей задачѣ, случаевъ, въ которыхъ число рѣшеній можетъ быть значительно меньше, полезно замѣтить, что на каждую плоскость, или на каждую радикальную точку, общую тремъ поверхностямъ, приходится по 16 рѣшеній; такъ что исчезаетъ столько разъ по 16 рѣшеній, сколько недостаетъ плоскостей соотвѣтствія, или радикальныхъ точекъ, общихъ четыремъ поверхностямъ.

Если, напримѣръ, четыре поверхности суть шары, то существуетъ только одна радикальная точка (это точка, которую Gaultier назвалъ *радикальнымъ центромъ* четырехъ шаровъ); такимъ образомъ получается только 16 рѣшеній.

Съ перваго взгляда можетъ показаться удивительнымъ, что четыре шара, расположенные какъ угодно въ пространствѣ, и пятый шаръ, касающійся ихъ, — разсматриваются какъ пять поверхностей втораго порядка, вписанныхъ въ одну поверхность того же порядка. Но причину этого видѣть не трудно.

Когда въ поверхности втораго порядка одна изъ осей дѣлается равна нулю, то поверхность обращается въ коническое сѣченіе; всякая другая поверхность втораго порядка, проходящая черезъ эту кривую, прикасается къ ней во всѣхъ ея точкахъ и можетъ потому считаться описанною около нея. Слѣдовательно поверхности втораго порядка, проходящія черезъ одно и то же коническое сѣченіе, имѣютъ свойства системы поверхностей, описанныхъ около одной поверхности втораго порядка, которая въ этомъ случаѣ имѣетъ одну ось равную нулю и приводится къ коническому сѣченію.

Если замѣтимъ при этомъ, что плоскость коническаго сѣченія относительно двухъ любыхъ поверхностей есть радикальная плоскость и что само коническое сѣченіе можетъ быть мнимымъ, хотя эта плоскость и остается дѣйствительною, то на основаніи *начала случайныхъ соотношеній* или *закона непрерывности* заключимъ отсюда, что всѣ поверхности втораго порядка, имѣющія общую радикальную плоскость, можно разсматривать, какъ вписанныя въ одну поверхность втораго порядка.

Полагая далѣе, что общая радикальная плоскость поверхностей удалена въ безконечность, получимъ поверхности подобныя и подобно расположенныя; такимъ образомъ: *подобныя и подобно расположенныя поверхности втораго порядка можно разсматривать, какъ систему поверхностеи вписанныхъ въ одну и ту же поверхность того-же порядка.*

Итакъ доказано, что рѣшенія, полученныя нами для опредѣленія поверхности втораго порядка, касающейся четырехъ другихъ и вмѣстѣ съ ними вписанной въ одну поверхность того-же порядка, прилагаются также и къ построенію шара касающагося четырехъ другихъ, или, общѣе, къ построенію поверхности втораго порядка, которая бы касалась четырехъ подобныхъ и подобно расположенныхъ поверхностей и была съ ними также подобна и подобно расположена.

ПРИМѢЧАНІЕ XXIX.

(Пятая эпоха, n° 30).

Доказательство одной теоремы, изъ которой проистекаетъ начало двойственности.

Теорема, о которой мы говоримъ, не можетъ быть выведена, подобно тому, какъ въ случаѣ плоскихъ фигуръ, изъ свойствъ *дополнительныхъ* фигуръ на шарѣ; но прямое доказательство ея очень просто. Оно основывается на слѣдующей теоремѣ

начальной геометріи: „Если изъ неподвижной точки къ различнымъ точкамъ плоскости будемъ проводить прямыя и на этихъ прямыхъ (или на ихъ продолженіяхъ) будемъ откладывать, считая отъ неподвижной точки, отрѣзки, обратно пропорціональные длинѣ линій, то концы отрѣзковъ будутъ лежать на шарѣ, который проходитъ черезъ неподвижную точку и центръ котораго находится на перпендикулярѣ къ плоскости, опущенномъ изъ неподвижной точки“.

Отсюда слѣдуетъ, что плоскости, проводимыя черезъ концы отрѣзковъ перпендикулярно къ направленію ихъ, будутъ проходить всѣ черезъ одну и туже точку на перпендикулярѣ, именно черезъ конецъ діаметра шара.

Для всякой другой плоскости получается другая соотвѣтственная точка.

Можно доказать, что, *если нѣсколько плоскостей проходятъ черезъ одну точку, то соотвѣтственныя имъ точки лежатъ въ одной плоскости.* Въ самомъ дѣлѣ, каждой плоскости будетъ соотвѣтствовать свой шаръ, и всѣ эти шары пройдутъ черезъ одну точку O, лежащую на прямой, соединяющей неподвижную точку S съ точкою пересѣченія всѣхъ плоскостей. Слѣдовательно прямая SO есть общая хорда всѣхъ шаровъ и плоскость, проведенная черезъ O перпендикулярно къ этой прямой, пройдетъ черезъ концы діаметровъ, проведенныхъ во всѣхъ шарахъ черезъ точку S. Но конецъ такого діаметра на каждомъ шарѣ есть *соотвѣтственная* точка плоскости, соотвѣтствующей этому шару. Итакъ всѣ соотвѣтственныя точки лежатъ въ одной плоскости.

Отсюда слѣдуетъ, что фигуры, построенныя въ пространствѣ, какъ показано было въ текстѣ, обладаютъ свойствомъ *двойственности*, точно также, какъ фигуры на плоскости, построеніе которыхъ получалось изъ дополнительныхъ фигуръ на шарѣ.

ПРИМѢЧАНІЕ XXX.

(Пятая эпоха n° 31).

О взаимныхъ кривыхъ и поверхностяхъ Монжа. Обобщеніе этой теоріи.

Взаимныя кривыя линіи и поверхности суть слѣдующія:

Если черезъ x, y означимъ координаты точки плоской кривой, то координаты соотвѣтственной точки *взаимной* кривой будутъ $x' = p$, $y' = px - y$, гдѣ $p = \frac{dy}{dx}$. Взаимность этихъ двухъ кривыхъ состоитъ въ томъ, что одна получается изъ другой точно также, какъ вторая изъ первой. (См. *Correspondance sur l'école polytechnique*, 1805, t. I, 73).

Мемуаръ Монжа *sur les surfaces réciproques* указанъ въ спискѣ различныхъ его мемуаровъ, помѣщенномъ въ началѣ его сочиненія *Application de l'analyse à la Géometrie* (3-е изд. 1809). Онъ долженъ бы заключаться въ числѣ мемуаровъ института за 1808 годъ, но я думаю, что онъ не былъ изданъ. Къ заглавію мемуара прибавлено слѣдующіе опредѣленіе *взаимныхъ поверхностей*:

«Если x, y, z суть координаты точки кривой поверхности, дифференціальное уравненіе которой есть $dz = pdx + qdy$, то координаты x', y', z' *взаимной* точки суть

$$x' = p, \quad y' = q, \quad z' = px + qy - z.$$

Мѣсто всѣхъ взаимныхъ точекъ есть поверхность *взаимная* съ данной. Взаимность этихъ двухъ поверхностей состоитъ въ томъ, что первая есть мѣсто взаимныхъ точекъ второй, также какъ вторая—мѣсто взаимныхъ точекъ первой».

Выраженіе x, y, z черезъ x', y', z' имѣютъ такой же видъ, какъ и выраженія x', y', z' черезъ x, y, z; дѣйствительно находимъ:

$$x = p', \quad y = q', \quad z = p'x' + q'y' - z'.$$

При одномъ взглядѣ на эти формулы замѣчаемъ, что *каждой касательной плоскости первой поверхности соотвѣтствуетъ точка второй*, и что, *если касательныя плоскости проходятъ черезъ одну точку, то соотвѣтственныя имъ точки лежатъ въ одной плоскости.*

Дѣствительно, касательная плоскость въ точкѣ x, y, z первой поверхности опредѣляется величинами ея координатъ и двухъ дифференціальныхъ кооффиціентовъ p и q. Этими же величинами опредѣляется и положеніе точки x', y', z', соотвѣтствующей этой касательный плоскости.

Далѣе, если касательная плоскость, уравненіе которой есть

$$z - Z = p\ (x - X) + q\ (y - У),$$

проходитъ черезъ точку α, β, γ, то между координатами x, y, z, точки прикосновенія будемъ имѣть соотношеніе

$$z - \gamma = p\ (x - \alpha) + q\ (y - \beta).$$

Вставляя въ это уравненіе выраженія x, y, z черезъ x', y', z', p', q', получимъ

$$z' + \gamma = \alpha x' + \beta y'$$

уравненіе плоскости, какъ и слѣдовало показать.

Взаимныя поверхности Монжа можно, на основаніи этого, разсматривать, какъ преобразуемыя одна въ другую при помощи начала *двойственности*. И дѣйствительно, *эти поверхности суть ничто иное, какъ взаимныя поляры относительно парабалоида вращенія, уравненіе котораго есть*

$$x^2 + y^2 = z.$$

Это геометрическое построеніе поверхностей Монжа показываетъ, что они представляютъ только частный случай цѣлаго класса взаимныхъ поверхностей, которыя также могутъ быть выражены аналитически и которыя съ геометрической точки зрѣнія суть *взаимныя поляры* по отношенію къ какой-либо поверхности втораго порядка.

Жаль, что мемуаръ этотъ остался неизвѣстенъ. Было бы интересно узнать путь, который привелъ Монжа къ открытію *взаимныхъ* поверхностей и, изъ безчисленнаго множества другихъ, именно тѣхъ, аналитическое выраженіе которыхъ есть самое простое; интересно бы было знать, не теоріею ли полюсовъ поверхностей втораго порядка руководствовался великій геометръ, и въ особенности важно было бы видѣть, какое употребленіе дѣлалъ онъ изъ разсмотрѣнія своихъ взаимныхъ поверхностей.

Мы знаемъ, что *взаимныя кривыя линіи* служили ему средствомъ для произведенія къ квадратурамъ интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ двумя перемѣнными вида $y = x.F(p) + f(p)$, гдѣ $F(p)$ и $f(p)$ означаютъ какія угодно функціи $p = \frac{dy}{dx}$.

Естественно по этому догадываться, что Монжъ для такой же цѣли изобрѣлъ и взаимныя поверхности и что онѣ служили ему для интегрированія уравненій съ частными дифференціалами для случая трехъ перемѣнныхъ. Дѣйствительно, нетрудно видѣть, что онѣ могутъ быть пригодны для этого. Если нужно, напримѣръ, интегрировать уравненіе съ частными дифференціалами

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

то мы будемъ разсматривать это уравненіе, какъ относящееся къ поверхности A, т.-е. предположимъ, что интегралъ его есть уравненіе поверхности A.

Данному уравненію соотвѣтствуетъ другое, относящееся къ поверхности A', взаимной съ A; это уравненіе будетъ

$$F(p', q', p'x' + q'y' - z', x', y') = 0.$$

Если это новое уравненіе интегрируется, то послѣ интеграціи получимъ $f(x', y', z') = 0$ и это будетъ конечное уравненіе поверхности A'.

Отъ этого уравненія путемъ исключенія перейдемъ къ уравненію поверхности A, взаимной съ A', и это будетъ интегралъ предложеннаго уравненія.

Если данное уравненіе содержитъ дифференціальные коэффиціенты втораго порядка

$$r=\frac{d^2z}{dx^2},\quad s=\frac{d^2z}{dxdy},\quad t=\frac{d^2z}{dy^2},$$

то и тогда способъ остается тотъ же. Мы переходимъ къ дифференціальному уравненію между $x', y', z', p', q', r', s', t'$ замѣняя дифференціальные коэффиціенты r, s, t ихъ выраженіями въ функціи r' s' t'. Для этихъ выраженій находимъ

$$r=\frac{t'}{r't'-s'^2},\quad s=\frac{s'}{r't'-s'^2},\quad t=\frac{r'}{r't'-s'^2}$$

и обратно

$$r'=\frac{t}{rt-s^2},\quad s'=\frac{s}{rt-s^2},\quad t'=\frac{r}{rt-s^2}$$ [286].

---

[286]) Вычисленіе этихъ выраженій очень просто. Дифференцируемъ уравненія $x=p'$ и $y=q'$ послѣдовательно относительно x и y, разсматривая p' и q', какъ функціи x' и y'; такимъ образомъ получаемъ слѣдующія четыре уравненія.

$$1=\frac{dp'}{dx'}\cdot\frac{dx'}{dx}+\frac{dp'}{dy'}\cdot\frac{dy'}{dx}$$

$$0=\frac{dp'}{dx'}\cdot\frac{dx'}{dy}+\frac{dp'}{dy'}\cdot\frac{dy'}{dy}$$

$$0=\frac{dq'}{dx'}\cdot\frac{dx'}{dx}+\frac{dq'}{dy'}\cdot\frac{dy'}{dx}$$

$$1=\frac{dq'}{dx'}\cdot\frac{dx'}{dy}+\frac{dq'}{dy'}\cdot\frac{dy'}{dy}.$$

Но

$$\frac{dp'}{dx'}=r';\quad \frac{dp'}{dy'}=\frac{dq'}{dx'}=s'\quad \frac{dq'}{dy'}=t'$$

и

$$\frac{dx'}{dx}=\frac{dp}{dx}=r,\quad \frac{dy'}{dx}=\frac{dq}{dy}=s;\quad \frac{dx'}{dx}=\frac{dp}{dy}=s;\quad \frac{dy'}{dy}=\frac{dp}{dy}=t.$$

Точно также можно поступать съ уравненіями, содержащими дифференціальные коэффиціенты высшихъ порядковъ.

Но этотъ способъ интегрированія не доставляетъ, кажется, полныхъ интеграловъ, содержащихъ произвольныя функціи, допускаемыя даннымъ дифференціальнымъ уравненіемъ. Если бы въ интегралъ уравненія, содержащаго перемѣнныя x', y', z', и относящагося къ поверхности A', входили произвольныя функціи, то онѣ помѣшали бы переходу къ уравненію взаимной поверхности путемъ исключенія.

Это затрудненіе заставляетъ особенно сильно сожалѣть объ утратѣ сочиненія Монжа, который такъ много способствовалъ успѣхамъ науки въ этой деликатной части анализа.

Мы сказали выше, что между взаимными полярными поверхностями поверхности Монжа отличаются самымъ простымъ аналитическимъ выраженіемъ ихъ. Мы должны прибавить, что есть другой разрядъ поверхностей, сходныхъ съ поверхностями Монжа и такъ же просто выражаемыхъ аналитически, но эти поверхности не относятся къ полярнымъ.

Соотношеніе между этими новыми взаимными поверхностями состоитъ въ слѣдующемъ.

Если черезъ x, y, z означимъ координаты точки первой поверхности и черезъ x', y', z'—координаты соотвѣтственной точки взаимной поверхности, то имѣемъ:

$$x' = q, \quad y' = -p, \quad z' = -px - qy + z$$

и

$$x = q', \quad y = -p', \quad z = -p'x' - q'y' + z'.$$

Эти формулы, подобно формуламъ Монжа, могутъ служить для интегрированія уравненій съ частными дифферен-

---

Поэтому предыдущія уравненія обращаются въ

$$\begin{aligned} 1 &= r'r + s's \\ 0 &= r's + s't \\ 0 &= s'r + t's \\ 1 &= s's + t't, \end{aligned}$$

откуда и получаемъ выраженія r, s, t черезъ r' s' t' и на оборотъ.

ціалами и можетъ случиться, что однѣ изъ нихъ окажутся примѣнимыми, тогда какъ другихъ употребить нельзя, т.-е. когда другія не ведутъ къ интегрируемому уравненію. Если данное уравненіе будетъ:

$$F(x', y, z, p, q) = 0,$$

то по формуламъ Монжа оно преобразуется въ

$$F(p', q', p'x' + q'y' - z', x', y') = 0,$$

а по новымъ формуламъ—въ

$$F(q', -p', -p'x' - q'y' + z', -y', x') = 0.$$

Возможны случаи, что это второе уравненіе интегрируется легче чѣмъ первое.

Соотношенія между дифференціальными коэффиціентами втораго порядка такъ же просты, какъ и въ формулахъ Монжа. Мы получимъ ихъ, дифференцируя уравненія $x = q'$, $y = -p'$ послѣдовательно относительно x и y, разсматривая при этомъ q' и p', какъ функціи x' и y'. Такимъ образомъ получаемъ четыре уравненія, изъ которыхъ три условливаютъ собою четвертое и изъ нихъ находимъ:

$$r' = -\frac{r}{rt - s^2}, \quad s' = -\frac{s}{rt - s^2}, \quad t' = -\frac{t}{rt - s^2}$$

и

$$r = -\frac{r'}{r't' - s'^2}, \quad s = -\frac{s'}{r't' - s'^2}, \quad t = -\frac{t'}{r't' - s'^2}.$$

Наши новыя поверхности имѣютъ между собою, также какъ и поверхности Монжа, извѣстное геометрическое соотношеніе, которое можно выразить различнымъ образомъ. Ограничимся однимъ изъ подобныхъ выраженій:

Если дана первая поверхность, то ей можно сообщить безконечно малое движеніе такого рода, что плоскости, перпендикулярныя къ направленіямъ движенія различныхъ ея то-

чекъ, будутъ касательными плоскостями взаимной поверхности.

Сообщаемое движеніе есть результатъ двухъ одновременныхъ элементарныхъ движеній, изъ которыхъ первое есть вращательное движеніе около неподвижной оси z, а второе—поступательное по направленію этой оси.

Взаимныя поверхности Монжа и новыя поверхности, которыхъ аналитическое выраженіе и геометрическое построеніе мы только что изложили, представляютъ только частные случаи другихъ поверхностей, имѣющихъ болѣе общее аналитическое выраженіе и способныхъ, подобно первымъ, служить для интегрированія уравненій.

Вотъ нѣкоторыя общія формулы, относящіяся къ этимъ поверхностямъ.

Если означимъ черезъ x, y, z координаты точки первой поверхности и черезъ p, q—два дифференціальные коэффиціента $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, то координаты взаимной точки второй поверхности будутъ:

$$x' = \frac{A'''(px+qy-z)+A''-A'q-Ap}{D'''(px+qy-z)+D''-D'q-Dp}$$

$$y' = \frac{B'''(px+qy-z)+B''-B'q-Bp}{D'''(px+qy-z)+D''-D'q-Dp} \qquad (1)$$

$$z' = \frac{C'''(px+qy-z)+C''-C'q-Cp}{D'''(px+qy-z)-D''-D'q-Dp},$$

A, B, C, D, A', B', C', D', A'', B'', C'', D'', A''', B''', C''', D''' суть произвольные коэффиціенты.

Точно также обратно

$$x=\frac{D(p'x'+q'y'-z')+C-Bq'-Ap'}{D'''(p'x'+q'y'-z')+C'''-B'''q'-A'''p'}$$

$$y=\frac{D'(p'x'+q'y'-z')+C'-B'q'-A'p'}{D'''(p'x'+q'y'-z')+C'''-B'''q'-A'''p'} \qquad (2)$$

$$z=\frac{D''(p'x'+q'y'-z')+C''-B''q'-A''p'}{D'''(p'x'+q'y'-z')+C'''-B'''q'-A'''p'}.$$

Выраженія p', q' черезъ x, y, z и p, q черезъ x', y', z' требуютъ довольно длинныхъ вычисленій. Чтобы составить ихъ, означимъ символомъ $(A'\ B''\ C''')$ многочленъ

$$A'(B''C'''-B'''C'')+A''(B'''C'-B'C''')+A'''(B'C''-B''C'),$$

черезъ $(B'\ C''\ A''')$ многочленъ, получаемый изъ перваго чрезъ замѣну A' на B', B'' на C'', C''' на A''', и подобнымъ же образомъ другіе многочлены, которые можно составить изъ 16 коэффиціентовъ A, B, C, D; A', B', C', D'; A'', B'', C'', D''; A''', B''', C''', D''', взятыхъ по три. При помощи этихъ сокращеній получаемъ для p', q' и для p, q слѣдующія выраженія:

$$\left.\begin{aligned} p'&=-\frac{(B'C''D''')x-(B''C'''D)y+(B'''CD')z-(BC'D'')}{(D'A''B''')x-(D''A'''B)y+(D'''AB')z-(DA'B'')}\\ q'&=-\frac{(C'D''A''')x-(C''D'''A)y+(C'''DA')z-(CD'A'')}{(D'A''B''')x-(D''A'''B)y+(D'''AB')z-(DA'B'')}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} p&=-\frac{(B'C''D''')x'-(C'D''A''')y'+(D'A''B''')z'-(A'B''C''')}{(B'''CD')x'-(C'''DA')y'+(D'''AB')z'-(A'''BC')}\\ q&=-\frac{(BC''D''')x'-(CD''A''')y'+(DA''B''')z'-(AB''C''')}{(B'''CD')x'-(C'''DA')y'+(D'''AB')z'-(A'''BC')}\end{aligned}\right\}$$

Чтобы удобнѣе замѣтить соотношенія, существующія между выраженіями p', q', p, q, означимъ различные многочлены, входящіе коэффиціентами въ эти выраженія, буквами a, b, c, d, a', b', c', d' и пр. именно:

$$
\begin{array}{llll}
a = (B' \; C'' \; D''') & b = -(C' \; D'' \; A''') \\
a' = -(B'' \; C''' D \;) & b' = (C'' \; D''' A \;) \\
a'' = (B''' C \; D' \;) & b'' = -(C''' D \; A' \;) \\
a''' = (B \; C' \; D'' \;) & b''' = -(C \; D' \; A'' \;)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
c = (D' \; A'' \; B''') & d = (A' \; B'' C''') \\
c' = -(D'' \; A''' B \;) & d' = -(A'' \; B''' C \;) \\
c'' = (D''' A \; B' \;) & d'' = (A''' B \; C \;) \\
c''' = (D \; A' \; B'' \;) &
\end{array}
$$

Тогда выраженія p', q', p, q будутъ

$$p' = -\frac{a\,x + a'\,y + a''z - a'''}{c'\,x + c'\,y + c''z - c'''}$$

$$q' = -\frac{b\,x + b'\,y + b''z - b'''}{c\,x + c'\,y + c''z - c'''}$$

$$p = -\frac{a\,x' + b\,y' + c\,z' - d}{a''x' + b''y' + c''z' - d''}$$

$$q = -\frac{a'\,x' + b'\,y' + c'\,z' - d'}{a''x' + b''y' + c''z' - d''}.$$

Въ формулахъ Монжа замѣчается полная взаимность между выраженіями x', y', z', p', q' черезъ x, y, z, p, q и выраженіями x, y, z, p, q черезъ x', y', z', p', q', т.-е. выраженія эти имѣютъ не только одинаковую форму, но и одинаковые коэффиціенты. Тоже замѣчается и въ тѣхъ формулахъ, которыя мы вывели послѣ формулъ Монжа. Но такой полной взаимности уже нѣтъ въ общихъ формулахъ; въ нихъ выраженія x', y', z', p', q' и x, y, z, p, q имѣютъ также одинаковую форму, но коэффиціенты различные. Чтобы придать этимъ общимъ формуламъ полную взаимность, достаточно располагать шестью изъ 16 произвольныхъ коэффиціентовъ A, B, C, D, A', B' и т. д. и положить

$$D=A''',\ D'=B''',\ D''=C''',\ B=A',\ C'=A'',\ C=B'';$$

отсюда получимъ

$$d=a''',\ d'=b''',\ d''=c''',\ b=a',\ c=a'',\ c'=b'';$$

тогда выраженія x', y', z', p', q' останутся безъ перемѣны, выраженія же x, y, z, p, q будутъ:

$$x=\frac{A'''(p'x'+q'y'-z')+A''-A'q'-Ap'}{D'''(p'x'+q'y'-z')+D''-D'q'-Dp'}$$

$$y=\frac{B'''(p'x'+q'y'-z')+B''-B'q'-Bp'}{D'''(p'x'-q'y'-z')+D''-D'q'-Dp'}$$

$$z=\frac{C'''(p'x'+q'y'-z')+C''-C'q'-Cp'}{D'''(p'x'+q'y'-z')+D''-D'q'-Dp'}$$

$$p=\frac{ax'+a'y'+a''z'-a'''}{cx'+c'y'+c''z'-c'''}$$

$$q=\frac{bx'+b'y'+b''z'-b'''}{cx'+c'y'+c''z'-c'''}$$

При этомъ должно помнить, что изъ шестнадцати коэффиціентовъ, заключающихся въ формулахъ (1) и (3), только десять остаются произвольными, вслѣдствіе допущенныхъ шести равенствъ $D'=A'''$ $D'=B'''$ и пр. Этими десятью произвольными коэффиціентами можно располагать такъ, чтобы формулы упростились, или подходили бы къ задачамъ, къ которымъ мы желаемъ ихъ примѣнить.

Чтобы получить формулы Монжа, нужно всѣ коэффиціенты, кромѣ A, B', C''', сдѣлать равными нулю и положить

$$A=-1,\ B'=-1,\ C'''=1.$$

ПРИМѢЧАНІЕ XXXI.

(Пятая эпоха, nº 48).

Новыя свойства поверхностей втораго порядка, соотвѣтствующія свойствамъ фокусовъ коническихъ сѣченій.

§ 1. Свойства линій эксцентрицитетовъ въ поверхностяхъ втораго порядка.

1. «Касательная и нормаль во всякой точкѣ коническаго сѣченія пресѣкаются съ каждой изъ главныхъ осей кривой въ двухъ точкахъ, гармонически сопряженныхъ относительно двухъ постоянныхъ точекъ; эти постоянныя точки всегда дѣйствительныя на одной оси, это именно фокусы, и мнимыя на другой» [287].

Въ поверхности втораго порядка этой теоремѣ соотвѣтствуетъ слѣдующая:

Нормаль и касательная плоскость въ каждой точкѣ поверхности втораго порядка пересѣкаютъ каждую главную плоскость поверхности [288]) *первая въ точкѣ, вторая по прямой линіи:*

Точка есть всегда полюсъ этой прямой относительно извѣстнаго коническаго сѣченія, лежащаго въ главной плоскости;

Въ плоскости наибольшей и средней оси это коническое сѣченіе есть эллипсъ;

Въ плоскости наибольшей и наименьшей оси оно есть гипербола.

---

[287]) Эти двѣ точки даютъ на второй оси два мнимые фокуса, такъ что можно сказать, что коническое сѣченіе имѣетъ *четыре фокуса*, изъ которыхъ два, лежащіе на большой оси,—дѣйствительные, а два, лежащіе на малой оси,—всегда мнимые.

[288]) Мы предполагаемъ, что поверхность имѣетъ центръ, но теорема, высказываемая нами, сама собою прилагается также и къ параболоиду.

Наконецъ въ плоскости средней и наименьшей оси оно всегда мнимое.

2: Можно также разсматривать слѣдующую теорему, какъ соотвѣтствующую вышеприведенному свойству коническихъ сѣченій:

Если въ каждой точкѣ поверхности втораго порядка проведемъ нормаль къ поверхности и двѣ касательныя къ линіямъ кривизны въ этой точкѣ, то эти три прямыя будутъ встрѣчаться съ каждою изъ главныхъ діаметральныхъ плоскостей въ такихъ трехъ точкахъ, что поляра каждой изъ нихъ относительно извѣстнаго коническаго сѣченія, лежащаго въ той же плоскости, проходитъ черезъ двѣ другія точки.

3. Три коническія сѣченія, получаемыя на основаніи той или другой изъ предыдущихъ теоремъ, совершенно опредѣлены и легко видѣть, что между каждымъ изъ нихъ и поверхностью существуютъ слѣдующія весьма простыя соотношенія, достаточныя для построенія этихъ кривыхъ; именно: *каждое изъ коническихъ сѣченій, о которыхъ мы говоримъ, лежитъ въ плоскости одного изъ главныхъ сѣченій поверхности; оно имѣетъ фокусами фокусы этого сѣченія и вершинами— фокусы двухъ другихъ главныхъ сѣченій поверхности.*

4. Отсюда слѣдуетъ, что большая ось эллипса и поперечная ось гиперболы лежатъ по наибольшей оси поверхности и что вершины эллипса суть фокусы гиперболы и наоборотъ, откуда выходитъ, что квадраты двухъ другихъ главныхъ осей этихъ кривыхъ, осей перпендикулярныхъ одна къ другой,—равны по величинѣ, но не по знаку.

Что касается третьяго, мнимаго, коническаго сѣченія, то оно имѣетъ два дѣйствительные фокуса, лежащіе въ концахъ малой оси эллипса. Квадраты двухъ мнимыхъ главныхъ осей его равны, за исключеніемъ знака, квадратамъ большой оси эллипса и поперечной оси гиперболы.

5. Если допустимъ, что коническое сѣченіе имѣетъ четыре фокуса, лежащихъ по два на обѣихъ главныхъ осяхъ и изъ которыхъ два дѣйствительные, а два мнимые, то со-

отношеніе между этими тремя кривыми можно выразить такъ:

Если дана одна изъ трехъ кривыхъ, то каждая изъ двухъ другихъ лежитъ въ плоскости, перпендикулярной къ плоскости первой кривой и проходящей черезъ одну изъ ея главныхъ осей, и имѣетъ вершинами тѣ фокусы и фокусами тѣ вершины первой кривой, которыя лежатъ въ этой главной плоскости.

Этого достаточно для полученія двухъ коническихъ сѣченій, когда третье дано.

6. Пусть будетъ для ясности

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

уравненіе поверхности; тогда уравненія трехъ коническихъ сѣченій, о которыхъ мы говоримъ, будутъ

$$\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}+\frac{x^2}{c^2-b^2}=1$$

$$\frac{y^2}{b^2-a^2}+\frac{z^2}{c^2-a^2}=1.$$

Если $a>b>c$, то первая кривая, лежащая въ плоскости xy, будетъ эллипсъ, вторая, въ плоскости xz, — гипербола и третья, въ плоскости yz,—кривая мнимая.

7. Эти три кривыя мы назовемъ *линіями эксцентрицитетовъ*, или *фокальными коническими сѣченіями.* [287].

[827]) Я буду употреблять первое названіе, хотя и предпочелъ бы второе по причинѣ его полной аналогіи съ названіемъ *фокусы* коническаго сѣченія. Но Кетле далъ уже названіе *фокальныхъ* линій кривымъ третьяго порядка, представляющимъ мѣсто фокусовъ всѣхъ плоскихъ сѣченій, образуемыхъ извѣстнымъ образомъ на конусѣ втораго порядка, и потому я не могу употреблять то же слово для обозначенія другихъ кривыхъ.

Какъ коническое сѣченіе имѣетъ двѣ пары фокусовъ, или два эксцентрицитета, изъ которыхъ одинъ—мнимый, точно также поверхности втораго порядка имѣютъ три *фокальныя кривыя* или *линіи эксцентрицитетовъ*, изъ которыхъ двѣ дѣйствительныя, а третья мнимая. [288])

8. Изъ предложеннаго построенія линій эксцентрицитетовъ поверхности втораго порядка видимъ:-

Если главныя сѣченія двухъ поверхностей втораго порядка описаны изъ однихъ и тѣхъ же фокусовъ, то онѣ имѣютъ

Эти фокальныя линія третьяго порядка я предложилъ бы называть *Focoïdes*, или еще лучше *Focoïcae*, согласно съ идеями Дюпена о номенклатурѣ въ геометріи (*Dévеloppemens de Géometrie*, примѣчаніе къ четвертому мемуару). Тогда имя *фокальныхъ коническихъ сѣченій*, или просто *фокальныхъ линій* (Focale), получили бы двѣ кривыя, играющія въ поверхностяхъ втораго порядка ту же роль, какъ фокусы въ коническихъ сѣченіяхъ. И когда эти кривыя разсматриваются въ ихъ взаимной связи, безъ всякаго отношенія къ поверхности, къ которой онѣ принадлежатъ, ихъ можно бы называть *сопряженными фокальными* линіями.

[288]) Можетъ, безъ сомнѣнія, показаться страннымъ, когда мы говоримъ, что изъ двухъ эксцентрицитетовъ коническаго сѣченія *одинъ* есть *мнимый*, или, что изъ трехъ линій эксцентрицитетовъ поверхности втораго порядка *одна мнимая*, тогда какъ извѣстно, что мнимыя величины являются не иначе, какъ попарно. Но мы можемъ сказать на это, что коническое сѣченіе имѣетъ еще третью пару фокусовъ, которые всегда мнимые и лежатъ въ безконечности. На эти фокусы еще не обращали вниманія, потому что при изслѣдованіи коническихъ сѣченій не старались открыть настоящее происхожденіе ихъ обыкновенныхъ фокусовъ и усмотрѣть аналогіи, существующія между ихъ особыми свойствами и общими свойствами всякой другой точки въ плоскости кривой. Точно также каждая поверхность втораго порядка имѣетъ четыре линіи эксцентрицитетовъ, изъ которыхъ одна всегда мнимая и лежитъ въ безконечности.

Здѣсь намъ безполезно разсматривать третью пару фокусовъ коническаго сѣченія и четвертую линію эксцентрицитетовъ поверхности. Откладываемъ до другаго времени изслѣдованіе общихъ свойствъ коническихъ сѣченій и поверхностей втораго порядка, изъ которыхъ проистекаютъ относительныя свойства *фокусовъ* и *линій эксцентрицитетовъ*.

однѣ и тѣже линіи эксцентрицитетовъ; и обратно, если двѣ поверхности имѣютъ однѣ и тѣже линіи эксцентрицитетовъ, то главныя сѣченія ихъ описаны изъ однихъ и тѣхъ же фокусовъ.

9. Объяснивъ достаточно опредѣленіе и построеніе линій эксцентрицитетовъ въ поверхностяхъ втораго порядка, мы изложимъ теперь многія свойтсва этихъ кривыхъ и укажемъ аналогію ихъ съ извѣстными свойствами фокусовъ въ коническихъ сѣченіяхъ.

«Если около коническаго сѣченія описанъ уголъ, то двѣ прямыя, дѣлящія пополамъ самый уголъ и его дополненіе, пересѣкаются съ каждой изъ двухъ главныхъ осей кривой въ двухъ точкахъ, гармонически сопряженныхъ относительно фокусовъ, лежащихъ на этой оси.»

Точно также

Если около поверхности втораго порядка описанъ конусъ, то три главныя оси его пересѣкаютъ каждую изъ трехъ главныхъ діаметральныхъ плоскостей поверхности въ такихъ трехъ точкахъ, что поляра каждой изъ нихъ относительно линіи эксцентрицитетовъ, лежащей въ этой же діаметральной плоскости, проходитъ черезъ двѣ остальныя точки.

10. «Если изъ какой-нибудь точки въ плоскости коническаго сѣченія проведемъ къ фокусамъ его двѣ прямыя, то онѣ будутъ одинаково наклонены къ прямой, дѣлящей пополамъ уголъ между двумя касательными, проведенными къ кривой изъ той же точки».

Для поверхностей имѣемъ такую соотвѣтственную теорему:

Если примемъ какую нибудь точку пространства за общую вершину двухъ конусовъ, изъ которыхъ одинъ описанъ около поверхности втораго порядка, а другой имѣетъ основаніемъ одну изъ линій эксцентрицитетовъ этой поверхности, то два такіе конуса будутъ имѣть одни и тѣ же главныя сѣченія и тѣ же фокальныя линіи.

11. «Если изъ какой-нибудь точки коническаго сѣченія проведемъ двѣ прямыя къ его фокусамъ, то онѣ будутъ одина-

ковы наклонены какъ къ нормали, такъ и къ касательной коническаго сѣченія въ этой точкѣ».

Это—одно изъ самыхъ древнихъ свойствъ коническихъ сѣченій; ему соотвѣтствуетъ для поверхности слѣдующая теорема:

Если будемъ разсматривать точку поверхности втораго порядка, какъ вершину конуса, имѣющаго основаніемъ одну изъ линій эксцентрицитетовъ поверхности, то нормаль къ поверхности и касательныя къ двумъ линіямъ кривизны въ этой точкѣ будутъ главными осями конуса [289]).

Если поверхность есть гиперболоидъ съ одною полостью, то двѣ образующія его, проходящія черезъ вершину конуса, будутъ фокальными линіями конуса.

12. Изъ первой части этой теоремы заключаемъ:

Если черезъ касательную линію въ какой-нибудь точкѣ поверхности втораго порядка проведемъ двѣ касательныя плоскости къ одной изъ линій эксцентрицитетовъ, то онѣ будутъ одинаково наклонены къ той касательной плоскости поверхности, которая проходитъ черезъ упомянутую касательную линію.

13. Изъ теоремы 10 можно вывести многія слѣдствія.

Такъ, если два конуса втораго порядка имѣютъ общія главныя оси и тѣ же фокальныя линіи, то они пересѣкаются между собою подъ прямыми углами [290]) и изъ теоремы 10 заключаемъ:

Для глаза, помѣщеннаго въ какой угодно точкѣ пространства, будетъ казаться, что внѣшній контуръ поверхности втораго порядка и одной изъ ея линій эксцентрицитетовъ пересѣкаются между собою подъ прямыми углами.

---

[289]) Такъ что, если коническое сѣченіе, служащее основаніемъ конусу, принимается за линію эксцентрицитетовъ поверхности втораго порядка, проходящей черезъ вершину конуса, то поверхность эта будетъ нормальна къ одной изъ трехъ главныхъ осей конуса.

[290] *Mémoire sur les propriétés générales des cônes du second degré*, p. 28.

14. Два конуса, имѣющіе общую вершину и основаніями которымъ служатъ двѣ линіи эксцентрицитетовъ поверхности, имѣютъ однѣ и тѣ же главныя оси и фокальныя линіи; слѣдовательно эти конусы пересѣкаются подъ прямыми углами и мы можемъ выразить это такъ:

Изъ какой бы точки пространства мы не разсматривали двѣ линіи эксцентрицитетовъ поверхности втораго порядка, онѣ всегда будутъ казаться пересѣкающимися подъ прямыми углами. [291])

15. Если вмѣсто конуса опишемъ около поверхности цилиндръ, то теорема 10 обратится въ такую:

Если около поверхности втораго порядка опишемъ цилиндръ и черезъ одну изъ линій эксцентрицитетовъ поверхности проведемъ другой цилиндръ, образующія котораго параллельны образующимъ перваго, то основаніями этихъ цилиндровъ въ плоскости, перпендикулярной къ ихъ образующимъ, будутъ два коническія сѣченія, описанныя изъ однихъ и тѣхъ же фокусовъ.

16. Отсюда заключаемъ:

Прямоугольныя проэкціи двухъ линій эксцентрицитетовъ поверхности втораго порядка на какую угодно плоскость суть два коническія сѣченія, описанныя изъ однихъ и тѣхъ же фокусовъ.

17. Таже теорема 10 могла бы доставить еще много слѣдствій, относящихся къ системѣ поверхностей, имѣющихъ однѣ и тѣ же линіи эксцентрицитетовъ; но въ настоящую минуту мы должны ограничиться свойствами только самыхъ этихъ линій.

---

[291]) Я имѣлъ уже случай высказать эту теорему въ *Mémoire sur les propriétés générales des surfaces de révolution* въ V томѣ *Nouv. Mém. de l'Acad. de Bruxelles*, 1829; тамъ я замѣтилъ, что два коническія сѣченія, о которыхъ идетъ рѣчь, обладаютъ многими другими, еще не открытыми, свойствами. И дѣйствительно, въ настоящемъ Примѣчаніи изложены многія свойства, которыя мнѣ кажутся новыми.

18. Фокусы коническаго сѣченія обладаютъ однимъ общимъ свойствомъ, которое, какъ отличительное, могло бы служить опредѣленіемъ фокусовъ; именно:

«Если черезъ произвольную точку въ плоскости коническаго сѣченія проведемъ двѣ взаимно перпендикурныя прямыя такъ, чтобы полюсъ одной, относительно коническаго сѣченія, лежалъ на другой, то эти прямыя пересѣкутъ каждую изъ главныхъ осей въ двухъ точкахъ, гармонически сопряженныхъ относительно двухъ постоянныхъ точекъ. Эти точки будутъ дѣйствительныя на большой оси кривой, именно—фокусы, и—мнимыя на малой оси».

Для поверхностей имѣемъ подобнымъ же образомъ слѣдующее характеристическое свойство линій эксцентрицитетовъ:

Если черезъ произвольную точку въ пространствѣ проведемъ три взаимно перпендикулярныя прямыя такъ, чтобы поляра каждой изъ нихъ, взятая относительно данной поверхности втораго порядка, лежала въ плоскости двухъ другихъ, то эти три прямыя будутъ пересѣкать каждую изъ трехъ главныхъ плоскостей поверхности въ такихъ трехъ точкахъ, что поляра каждой изъ нихъ, относительно линіи эксцентрицитетовъ, лежащей въ той же плоскости, пройдетъ черезъ двѣ другія точки.

19. Чтобы видѣть аналогію между извѣстными свойствами фокусовъ и нѣкоторыми свойствами линій эксцентрицитетовъ, о которыхъ мы хотимъ говорить, нужно разматривать двойной эксцентрицитетъ коническаго сѣченія, т.-е. прямую, соединяющую два фокуса, какъ коническое сѣченіе, малая ось котораго равна нулю. При этомъ каждую прямую, проведенную черезъ фокусъ, мы можемъ разсматривать, какъ касательную къ такому коническому сѣченію.

20. Извѣстно, что «полюсъ всякой сѣкущей, проведенной черезъ фокусъ коническаго сѣченія, лежитъ на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ фокуса къ этой сѣкущей».

Точно также, *каждая сѣкущая плоскость, касающаяся линіи эксцентрицитетовъ поверхности втораго порядка, имѣ-*

етъ полюсъ, относительно этой поверхности, на перпендикуляръ къ плоскости, возставленномъ изъ точки ея прикосновенія къ линіи эксцентрицитетовъ.

21. Предыдущая теорема относительно коническихъ сѣченій есть частный случай слѣдующей теоремы, которая можетъ быть никѣмъ еще не замѣчена, но которую нетрудно доказать:

«Если въ плоскости коническаго сѣченія проведемъ произвольную сѣкущую, затѣмъ возьмемъ ея полюсъ относительно этой кривой и еще точку, гармонически сопряженную относительно фокусовъ съ тою точкою, въ которой сѣкущая пересѣкаетъ большую ось, то прямая, соединяющая эти двѣ точки, будетъ перпендикулярна къ сѣкущей».

Точно также, *пустъ дана поверхность втораго порядка и проведена какая-нибудь сѣкущая плоскость; если возьмемъ полюсъ плоскости относительно поверхности и полюсъ линіи пересѣченія этой же плоскости съ плоскостію одной изъ линій эксцентрицитетовъ относительно этой линіи, то прямая, соединяющая два полюса, будетъ перпендикулярна къ сѣкущей плоскости.*

22. «Произведеніе разстояній фокусовъ коническаго сѣченія отъ всякой касательной постоянно». Если черезъ фокусы проведемъ двѣ прямыя, параллельныя касательной, которыя мы будемъ разсматривать, согласно съ тѣмъ, что было сказано выше въ n^0 19, какъ касательныя къ двойному эксцентрицитету, то произведеніе разстояній этихъ прямыхъ отъ касательной, будетъ постоянно.

Точно также: *въ поверхности втораго порядка, произведеніе разстояній всякой касательной плоскости отъ тѣхъ двухъ точекъ линіи эксцентрицитетовъ, въ которыхъ ея касательныя параллельны этой плоскости,—постоянно.*

23. «Произведеніе разстояній фокуса коническаго сѣченія отъ двухъ параллельныхъ касательныхъ постоянно».

Точно также, *произведеніе разстояній каждой точки линіи эксцентрицитетовъ поверхности втораго порядка отъ двухъ касательныхъ плоскостей, параллельныхъ какъ между собою,*

такъ и съ линіею, которая касается этой кривой въ разсматриваемой точкѣ,—постоянно.

24. «Если черезъ фокусъ коническаго сѣченія проведемъ прямую, параллельную какой-нибудь касательной, то разность квадратовъ разстояній этихъ прямыхъ отъ центра коническаго сѣченія—постоянна». Это прямо слѣдуетъ изъ того, что произведеніе разстояній фокусовъ отъ касательной постоянно.

Точно также, *если проведемъ касательную плоскость къ поверхности втораго порядка и параллельную ей касательную плоскость къ одной изъ линій эксцентрицитетовъ, то разность квадратовъ разстояній этихъ плоскостей отъ центра поверхности будетъ постоянна.*

Эта и предыдущая теоремы могутъ служить для построенія линій эксцентрицитетовъ поверхности.

25. «Вершина прямаго угла, котораго одна сторона скользетъ по коническому сѣченію, а другая проходитъ черезъ фокусъ, описываетъ окружность, построенную на большой оси, какъ на діаметрѣ».

Точно также, *вершина трегранняго угла, составленнаго изъ трехъ прямыхъ, котораго одна грань скользитъ по поверхности втораго порядка, а двѣ другія по двумъ ея линіямъ эксцентрицитетовъ, описываетъ поверхность шара, построеннаго на наибольшей оси, какъ на діаметрѣ.*

26. Двѣ грани трегранняго угла, составленнаго изъ прямыхъ плоскихъ угловъ, могутъ скользить по поверхности, а третья по одной изъ линій эксцентрицитетовъ; или двѣ грани по одной линіи эксцентрицитетовъ, а третья по поверхности, или по второй линіи эксцентрицитетовъ;—во всѣхъ этихъ трехъ случаяхъ вершина трегранняго угла описываетъ шаръ, но во всѣхъ случаяхъ различный.

27. По изложеннымъ нами уравненіямъ и построеніямъ легко узнать въ линіяхъ эксцентрицитетовъ поверхностей втораго порядка кривыя, уже давно найденныя многими геометрами. Дюпенъ нашелъ ихъ, какъ геометрическое мѣсто

центровъ безчисленнаго множества шаровъ, касающихся трехъ данныхъ шаровъ [292]) и потомъ какъ предѣлъ рядовъ поверхностей втораго порядка, опредѣляющихъ взаимно ортогональныя траэкторіи [293]); Бине встрѣтилъ ихъ, какъ мѣста точекъ въ пространствѣ, въ которыхъ два главные момента инерціи твердаго тѣла равны между собою [294]); Амперъ—какъ мѣста точекъ въ твердомъ тѣлѣ, черезъ которыя проходитъ безчисленное множество постоянныхъ осей вращенія [295]); Кетле [296]), а потомъ Демонферранъ [297]) и Мортонъ [298]),—какъ мѣсто вершины всѣхъ конусовъ вращенія, которые можно провести черезъ данное коническое сѣченіе; Штейнеръ [299]) и позднѣе Бобилье [300])—какъ мѣсто вершины конусовъ вращенія, описанныхъ около данной поверхности втораго порядка.

Но въ разнообразныхъ изысканіяхъ этихъ геометровъ, какъ мнѣ кажется, нѣтъ ничего, что могло бы навести на мысль объ аналогіи, обнаруженной нами между свойствами и этихъ кривыхъ относительно поверхностей, къ которымъ онѣ принадлежатъ, и между свойствами фокусовъ въ коническихъ сѣченіяхъ.

Многія изъ свойствъ этихъ кривыхъ представляютъ болѣе полноты, нежели свойства фокусовъ; причина этого заключается въ большей общности поверхностей втораго порядка, которыя имѣютъ три измѣренія и обращаются въ коническія

---

[292]) *Correspondance sur l'école polytechnique*, t. I, p. 25, et t. II, p. 424.

[293]) *Développement de Géométrie*, p. 280.

[294]) *Journal de l'école polytechnique*, XVI, p. 63.

[295]) *Mémoire sur les axes permanens de rotation des corps*, p. 55.

[296]) *Nouveaux Mémoires de l'Academie de Bruxelles*, 1820, t. II, p. 151 et *Correspondance mathématique*, t. III, p. 274.

[297]) *Bulletin de la société philomatique*, 1825.

[298]) *Transactions of the philosophical society of Cambridge* t. III, 185.

[299]) *Mathem. Jornal* von Crelle, t. I, p. 38, et *Bulletin* de Ferussac 1827, p. 2.

[300]) *Correspondance mathématique* de Quetelet, t. IV, p. 157.

сѣченія только тогда, когда утрачиваютъ одно измѣреніе. Отсюда слѣдуетъ также, что нѣкоторыя слѣдствія и частные случаи общихъ свойствъ линій эксцентрицитетовъ не могутъ имѣть себѣ соотвѣтствующихъ между свойствами фокусовъ; это именно тогда, когда въ общемъ характерѣ утрачивается именно то, что составляло ихъ аналогію, или ихъ связь, съ свойствами фокусовъ.

Прибавленіе: Миндингъ, докторъ Берлинскаго университета, въ мемуарѣ подъ заглавіемъ: *Untersuchung, betreffend die Frage nach einem Mittelpunkte nicht paralleler Kräfte,* доказалъ замѣчательную теорему, доставляющую новое свойство линій экцентрицитетовъ въ поверхностяхъ втораго порядка. Вотъ эта теорема:

„*Если силы системы таковы, что не находятся въ равновѣсіи, и если будемъ ихъ обращать около точекъ приложенія, не измѣняя ихъ взаимнаго наклоненія, то будетъ безчисленное множество положеній, въ которыхъ эти силы могутъ быть замѣнены одной составной. Направленіе такой составной силы всегда пересѣкается съ эллипсомъ и гиперболой, лежащими въ двухъ взаимно перпендикулярныхъ плоскостяхъ и имѣющими другъ къ другу такое соотношеніе, что фокусы одной кривой совпадаютъ съ вершинами другой.*

Обратно, каждую прямую, соединяющую точку эллипса съ точкою гиперболы, можно разсматривать, какъ направленіе составной для извѣстнаго положенія системы силъ“. (См. *Comptes rendus des séances de l'Académie de sciences de Paris,* 1835, p. 282, и *Math. Journ.* Crelle, t. 14.)

Разсматривая эти двѣ кривыя, какъ передѣлъ ряда поверхностей втораго порядка, вписанныхъ въ одну обертывающую поверхность, мы приходимъ къ догадкѣ, что теорема Миндинга есть только частный случай болѣе общей теоремы, въ которой роль, подобную роли коническихъ сѣченій, играютъ поверхности втораго порядка.

Напримѣръ, вмѣсто того предположенія, что силы системы, обращаясь около точекъ приложенія, принимаютъ положеніе, при которомъ онѣ имѣютъ одну составную, можно допустить, что *наименьшая* пара при извѣстномъ положеніи имѣетъ данную величину (въ случаѣ одной составной это—нуль), и искать, каково должно быть при этомъ въ пространствѣ положеніе оси этой наименьшей пары, или *центральной оси моментовъ.* (См. *Elémens de statique,* par Poinsot, 6-e éd. p. 359.) Результатъ такаго изысканія долженъ необходимо вести къ обобщенію прекрасной

теоремы Миндинга и можетъ быть при этомъ значительную роль будутъ играть поверхности втораго порядка.

Теорія системы силъ, вращающихся около своихъ точекъ приложенія, при чемъ ихъ величина и относительное положеніе остаются безъ перемѣны, становится значительно обширнѣе и можетъ вести къ очень многимъ интереснымъ задачамъ, если, не ограничиваясь случаемъ одной составной, мы будемъ въ ней разсматривать *центральную ось моментовъ*. Такъ напримѣръ:

1) Если центральная ось моментовъ остается параллельна одной и той же прямой, то какую цилиндрическую поверхность она описываетъ?

2) Если она остается параллельна одной плоскости, то какой кривой поверхности касается она во всѣхъ своихъ положеніяхъ?

3) Если она должна всегда проходить черезъ одну точку, то какова описываемая ею коническая поверхность?

4) Если она остается постоянно въ одной плоскости, то какую кривую огибаетъ.

Въ настоящее время мы не можемъ заниматься подобными изысканіями и указываемъ на нихъ только потому, что надѣемся возбудить интересъ къ нѣкоторыхъ читателяхъ.

28. Всѣмъ свойствамъ коническихъ сѣченій существуютъ соотвѣтственныя въ конусахъ втораго порядка, въ которыхъ роль фокусовъ играютъ фокальныя линіи. Но и конусы имѣютъ одно отличительное свойство, которымъ мы пользовались для изученія фокальныхъ прямыхъ [301]), которое однако не можетъ имѣть мѣста въ коническихъ сѣченіяхъ, хотя оно и ведетъ непосредственно ко многимъ свойствамъ фокусовъ этихъ кривыхъ. Это свойство состоитъ въ томъ, что *каждая плоскость, перпендикулярная къ фокальной линіи, пересѣкаетъ конусъ по коническому сѣченію, одинъ изъ фокусовъ котораго есть точка пересѣченія этой плоскости съ фокальной линіей.*

Естественно думать, что этой теоремѣ должна существовать соотвѣтственная въ поверхностяхъ втораго порядка. И дѣйствительно, находимъ:

Каждая линія эксцентрицитетовъ поверхности втораго порядка имѣетъ то свойство, что нормальная плоскость въ

---

[301]) Mémoire sur les propriétés générales des cônes du second degré p. 13.

каждой ея точкѣ пересѣкаетъ поверхность по коническому сѣченію, имѣющему фокусъ въ этой точкѣ.

Теорема представляетъ полную аналогію между линіями эксцентрицитетовъ поверхности втораго порядка и фокальными линіями конуса того же порядка.

29) Есть еще одно основное свойство коническихъ сѣченій, которое существуетъ также въ конусахъ, но соотвѣтственнаго которому мы не указали еще въ поверхностяхъ втораго порядка. Именно: «сумма или разность радіусовъ векторовъ, проведенныхъ изъ точки коническаго сѣченія къ двумъ его фокусамъ, постоянна». Мы долгое время старались найти что-нибудь подобное для поверхностей, но напрасно. Мы искренно желаемъ, чтобы предметъ этотъ показался достаточно интереснымъ, чтобы вызвать новыя изслѣдованія. Хотя мы имѣемъ нѣкоторыя основанія предполагать, что искомая теорема не можетъ выражаться такъ же просто *(explicite)*, какъ для коническихъ сѣченій, но тѣмъ не менѣе думаемъ, что здѣсь остается еще открыть нѣчто новое и что эта задача заслуживаетъ вниманія и труда геометровъ.

§ 2. Свойство двухъ или трехъ поверхностей, имѣющихъ однѣ и тѣ же линіи эксцентрицитетовъ.

30. Мы разсматривали до сихъ поръ соотношенія, существующія между поверхностями втораго порядка и ихъ линіями эксцентрицитетовъ. Теперь будемъ говорить о свойствахъ, принадлежащихъ двумъ и тремъ поверхностямъ, имѣющимъ однѣ и тѣ же линіи эксцентрицитетовъ.

«Черезъ каждую точку можно провести два коническія сѣченія, имѣющія общими фокусами двѣ данныя точки; одно изъ нихъ—эллипсъ, другое—гипербола; они пересѣкаются подъ прямыми углами и касательныя къ нимъ въ каждой точкѣ пересѣченія дѣлятъ пополамъ два дополнительные угла, составляемые линіями, проведенными изъ этой точки къ фокусамъ кривой».

Точно также: *черезъ каждую точку пространства можно провести три поверхности втораго порядка, имѣющія*

общею линіею эксцентрицитетовъ данное коническое сѣченіе; одна изъ этихъ поверхностей есть эллипсоидъ, другая—гиперболоидъ съ одною полостью и третья—гиперболоидъ съ двумя полостями. Эти три поверхности пересѣкаются попарно подъ прямыми углами; три касательныя къ линіямъ ихъ пересѣченія въ общей точкѣ суть главныя оси конуса, вершина котораго лежитъ въ этой точкѣ и основаніемъ которому служитъ линія эксцентрицитетовъ; фокальныя линіи этого конуса суть двѣ образующія гиперболоида съ одною полостію, проходящія черезъ вершину конуса.

Прибавимъ къ этому, что кривыя пересѣченія поверхностей суть ихъ линіи кривизны; это уже доказано было Дюпеномъ и Бине.

31. Изъ этой теоремы выводятся разнообразныя слѣдствія на томъ основаніи, что большая часть свойствъ, относящихся къ одной поверхности и ея линіямъ эксцентрицитетовъ, ведетъ къ свойствамъ двухъ или многихъ поверхностей, имѣющихъ однѣ и тѣ же линіи эксцентрицитетовъ.

32. Такимъ образомъ изъ теоремы n^0 11 заключаемъ:

Если двѣ поверхности втораго порядка имѣютъ однѣ и тѣ же линіи эксцентрицитетовъ и если какую-нибубь точку пространства примемъ за общую вершину двухъ конусовъ, описанныхъ около поверхностей, то эти конусы будутъ имѣть однѣ и тѣ же оси и тѣ же фокальныя линіи. Главныя оси конусовъ будутъ нормали къ тремъ поверхностямъ, проведеннымъ черезъ общую вершину конусовъ и имѣющимъ съ данными поверхностями одинаковыя линіи эксцентрицитетовъ. Двѣ фокальныя линіи будутъ образующими одной изъ этихъ трехъ поверхностей, именно гиперболоида съ одною полостью.

33. Изъ этой теоремы выводимъ:

Если двѣ поверхности втораго порядка имѣютъ однѣ и тѣ же линіи эксцентрицитетовъ, то видимые контуры ихъ

изъ какой угодно точки пространства будутъ казаться пересѣкающимися подъ прямыми углами. [302])

34. *И потому двѣ такія поверхности могутъ представлять двѣ полости, составляющія въ совокупности мѣсто центровъ кривизны одной опредѣленной поверхности.*

35. Если вершина конуса удалена въ безконечность, то теорема n^0 32 доставляетъ слѣдующую:

Если двѣ поверхности втораго порядка имѣютъ однѣ и тѣ же линіи эксцентрецитетовъ и если представимъ себѣ два цилиндра, описанные около этихъ поверхностей и имѣющіе параллельныя образующія, то сѣченіе этихъ цилиндровъ плоскостію, перпендикулярною къ образующимъ, будетъ состоять изъ двухъ коническихъ сѣченій, имѣющихъ одинаковые фокусы.

Мы видимъ, что свойство двухъ такихъ поверхностей, состоящее въ томъ, что главныя сѣченія ихъ описаны изъ однихъ и тѣхъ же фокусовъ, есть частное слѣдствіе этой теоремы.

36. «Если касательную и нормаль въ какой-нибудь точкѣ коническаго сѣченія примемъ за главныя оси и построимъ два другія коническія сѣченія, проходящія черезъ центръ даннаго и соотвѣтственно нормальныя къ его главнымъ осямъ, то

1. Оба эти коническія сѣченія будутъ имѣть одни и тѣ же фокусы.

2. Оси ихъ, направленныя по нормали къ данному коническому сѣченію, будутъ соотвѣтственно равны тѣмъ главнымъ осямъ его, къ которымъ эти кривыя нормальны».

Точно также

Если нормаль и двѣ касательныя къ линіямъ кривизны въ какой-нибудь точкѣ поверхности втораго порядка примемъ за

---

[302]) Эту теорему я доказалъ уже для двухъ поверхностей вращенія въ моемъ мемуарѣ объ общихъ свойствахъ этихъ поверхностей, и для двухъ какихъ-нибудь поверхностей, какъ изложено здѣсь, въ мемуарѣ о построеніи нормалей къ различнымъ механическимъ кривымъ, предложенномъ филоматическому обществу въ апрѣлѣ 1830 г.

главныя оси трехъ другихъ поверхностей втораго порядка, проходящихъ чрезъ центръ данной и соотвѣтственно нормальныхъ къ тремъ главнымъ осямъ ея, то

1. *Эти три поверхности будутъ имѣть тѣ же линіи эксцентрицитетовъ.*

2. *Діаметры этихъ поверхностей, направленные по нормали къ данной, равны соотвѣтственно тѣмъ тремъ ея діаметрамъ, которые нормальны къ этимъ тремъ поверхностямъ.*

37. Признакъ, посредствомъ котораго въ анализѣ выражается, что главныя сѣченія двухъ поверхностей описаны изъ однихъ и тѣхъ же фокусовъ, заключается въ томъ, что разность квадратовъ главныхъ діаметровъ—постоянна.

Если a^2, b^2, c^2 будутъ квадраты полуосей первой поверхности и a'^2, b'^2, c'^2—квадраты полуосей второй, то мы имѣемъ

$$a^2-a'^2=b^2-b'^2=c^2-c'^2.$$

Это соотношеніе между двумя поверхностями, выражающее, что онѣ имѣютъ однѣ и тѣ же линіи эксцентрицитетовъ, можетъ быть двоякимъ образомъ обобщено и выведено изъ свойствъ, относящихся не только къ вершинамъ, но ко всѣмъ другимъ точкамъ этихъ поверхностей.

Одно изъ этихъ общихъ свойствъ можно выразить слѣдующей теоремой:

Если къ двумъ поверхностямъ втораго порядка, имѣющимъ однѣ и тѣ же линіи эксцентрицитетовъ, проведемъ двѣ параллельныя между собою касательныя плоскости, то разность квадратовъ ихъ разстояній отъ центровъ поверхностей будетъ постоянна, каково бы ни было положеніе этихъ касательныхъ плоскостей.

38. Отсюда слѣдуетъ:

Если эллипсоидъ и гиперболоидъ имѣютъ одинаковыя линіи эксцентрицитетовъ, то касательныя плоскости эллипсоида, параллельныя касательнымъ плоскостямъ къ асимптотическому конусу гиперболоида, будутъ всѣ находиться на одинаковомъ разстояніи отъ общаго центра поверхностей.

39. Второе изъ общихъ свойствъ относится къ двумъ поверхностямъ одного рода, т.-е. къ двумъ гиперболоидамъ съ одною или съ двумя полостями. Чтобы его выразить, назовемъ *соотвѣтственными* точками поверхностей двѣ такія точки, координаты которыхъ по направленію главныхъ осей пропорціональны полудіаметрамъ поверхности, направленнымъ по этимъ осямъ. Тогда найдемъ:

Если двѣ поверхности втораго порядка и одного рода имѣютъ одинаковыя линіи эксцентрицитетовъ, то разность квадратовъ полудіаметровъ, проведенныхъ въ соотвѣтственныя точки,—постоянна.

40. Изъ этой теоремы выводится для поверхностей съ одинаковыми линіями эксцентрицитетовъ другое замѣчательное свойство, которое въ примѣненіи къ эллипсоиду служитъ основаніемъ прекрасной теоремы Эйвори о притяженіи этого тѣла. Именно:

Если двѣ поверхности втораго порядка и одного рода имѣютъ однѣ и тѣ же линіи эксцентрицитетовъ, то разстояніе двухъ какихъ-нибудь точекъ на этихъ поверхностяхъ равно разстоянію соотвѣтственныхъ точекъ.

41. Закончимъ этотъ параграфъ двумя теоремами, которыя подобно предыдущей, имѣютъ приложеніе къ теоріи притяженія эллипсоидовъ.

Маклоренъ доказалъ, что «если два эллипса имѣютъ одни и тѣ же фокусы и если черезъ точку, взятую на одной изъ ихъ главныхъ осей, проведемъ двѣ сѣкущія, составляющія со второю осью углы, которыхъ косинусы относятся между собою какъ діаметры, направленные по этой второй оси, то отрѣзки сѣкущихъ, образуемые соотвѣтственно двумя эллипсами, относятся между собою какъ діаметры, направленные по первой оси». (*Treatise of fluxions*, art. 648.)

Соотвѣтственная теорема для поверхностей втораго порядка можетъ быть выражена въ болѣе пространной и полной формѣ; именно:

Если двѣ поверхности втораго порядка имѣютъ однѣ и тѣ же линіи эксцентрицитетовъ и если черезъ какую-нибудь

точку, взятую на одной изъ ихъ главныхъ осей, проведемъ произвольно сѣкущую къ первой поверхности, потомъ вторую сѣкущую, опредѣляемую тѣмъ условіемъ, что косинусы угловъ, образуемыхъ двумя сѣкущими съ каждою изъ двухъ остальныхъ главныхъ осей, относятся между собою какъ діаметры поверхности, направленные по этимъ осямъ, то

1) *Отрѣзки, образуемые на этихъ сѣкущихъ соотвѣтственно двумя поверхностями, будутъ относиться между собою какъ діаметры поверхностей, направленные по первой оси;*

2) *Синусы угловъ, образуемыхъ сѣкущими съ первой осью, будутъ относиться какъ два діаметра поверхностей, проходящіе черезъ тѣ точки, въ которыхъ сѣкущія встрѣчаются съ діаметральною плоскостью, перпендикулярною къ первой оси;*

3) *Оба эти діаметра двухъ поверхностей будутъ соотвѣтственные.*

42. Съ помощію этой теоремы легко доказать теорему Маклорена о притяженіи эллипсоида на точку его главной оси (*Treatise of fluxions,* art. 653). Доказательство будетъ прямое и не потребуетъ, какъ доказательство Маклорена, предварительнаго знанія притяженія эллипсоидомъ вращенія точки, лежащей на оси вращенія.

43. Легко доказать, что «если два коническія сѣченія имѣютъ одни и тѣ же фокусы и если изъ точки, взятой на одной изъ главныхъ осей, проведемъ двѣ касательныя, то косинусы угловъ, образуемыхъ ими со второю осью, относятся между собою, какъ діаметры коническихъ сѣченій, направленные по этой второй оси».

Точно также: *если двѣ поверхности втораго порядка имѣютъ однѣ и тѣ же линіи эксцентрицитетовъ и если черезъ прямую, лежащую въ одной изъ ихъ главныхъ плоскостей, проведемъ двѣ касательныя плоскости, то косинусы угловъ, образуемыхъ ими съ осью, перпендикулярной къ этой главной плоскости, будутъ относиться между собою, какъ діаметры поверхностей, направленные по этой оси.*

44. Теорема эта могла бы вытекать изъ анализа, изложеннаго Лежандромъ въ его мемуарѣ о притяженіи эллипсоидовъ, [303]) если бы этотъ знаменитый геометръ старался найти геометрическое значеніе формулъ, которые онъ получалъ, стремясь къ прямому рѣшенію этой трудной задачи. Мы можемъ, кажется, сказать, что подобный переводъ формулъ Лежандра на обыкновенный языкъ, могъ бы вести также ко многимъ другимъ интереснымъ результатамъ. Такимъ образомъ, оказалось бы, что коническія поверхности, которыми онъ пользовался при интегрированія, имѣютъ главными осями оси конуса, описаннаго около притягивающаго эллипсоида, и что одна изъ этихъ осей есть именно та прямая, которая обладаетъ свойствомъ *тахітит* и которая играетъ важную роль въ этомъ предметѣ. Это свойство *тахітит* выражено у Лежандра посредствомъ уравненія третьей степени; въ геометріи же оно означаетъ, что, *если около притягиваемой точки будемъ вращать сѣкущую и будемъ брать разность величинъ, обратныхъ разстояніямъ этой точки отъ двухъ точекъ пересѣченія сѣкущей съ поверхностью эллипсоида, то эта разность будетъ тахітит, когда направленіе сѣкущей есть одна изъ трехъ главныхъ осей конуса, описаннаго около эллипсоида и имѣющаго вершину въ притягиваемой точкѣ.* Если требуется, чтобы разность, вмѣсто того, чтобы быть *тахітит*, оставалась постоянна, то находимъ, что сѣкущая должна для этого описывать конусъ втораго порядка. Такими то конусами и пользовался Лежандръ. Ихъ общее свойство состоитъ въ томъ, что всѣ они проходятъ черезъ кривыя двоякой кривизны втораго порядка, получаемыя отъ пересѣченія извѣстнаго гиперболоида съ двумя полостями съ системою концентрическихъ шаровъ.

45. Обратимъ еще вниманіе на то, что всѣ изложенныя до сихъ поръ теоремы, за исключеніемъ двухъ послѣднихъ, имѣютъ весьма большую общность; т.-е. точки, плоскости

---

[303]) См. *Mémoires de l'Académie des sciences*, 1788.

и прямыя, которыя мы разсматривали по отношенію къ поверхностямъ втораго порядка, имѣли въ этихъ теоремахъ совершенно произвольное положеніе.

Въ двухъ же послѣднихъ теоремахъ, напротивъ, точка, черезъ которую проводятся сѣкущія, берется необходимо на одной изъ главныхъ осей поверхности и прямая, черезъ которую проводятся касательныя плоскости, лежитъ въ одной изъ главныхъ плоскостей. Интересно было бы знать общія теоремы, въ которыхъ эта точка и эта прямая имѣли бы совершенно произвольныя положенія въ пространствѣ, теоремы, изъ которыхъ вышеприведенныя (*n*⁰ *n*⁰ 41 и 43) вытекали бы какъ частные случаи.

Мы указываемъ на этотъ предметъ для изысканій въ интересахъ геометріи и думаемъ, что это могло бы повести къ прямому геометрическому рѣшенію, безъ помощи теоремы Эйвори, вопроса о притяженіи эллипсоидомъ какой угодно внѣшней точки, подобно тому, какъ указанная нами теорема (*n*⁰ 41) даетъ притяженіе для точки, лежащей на главной оси.

Прибавленіе. Уже послѣ того, какъ это Примѣчаніе было напечатано, я дошелъ до обобщенія двухъ теоремъ *n*⁰ *n*⁰ 41 и 43 и убѣдился, какъ и прежде ожидалъ, что вторая изъ этихъ теоремъ ведетъ къ синтетическому и независимому отъ всякихъ формулъ доказательству прекрасной теоремы о притяженіи внѣшней точки двумя эллипсоидами, главныя сѣченія которыхъ имѣютъ одни и тѣ же фокусы.

Знаменитѣйшимъ геометрамъ казалось, что подобное доказательство должно представлять затрудненія и можетъ быть превосходитъ средства синтеза *).

Обѣ обобщенныя теоремы можно получить изъ частныхъ случаевъ, изложенныхъ въ *n*⁰ *n*⁰ 41 и 43, при помощи одной теоремы, которая также представляетъ прекрасное свойство поверхностей втораго порядка, имѣющихъ однѣ и тѣ же линіи эксцентрицитетовъ. Здѣсь мы ограничимся изложеніемъ только этой послѣдней теоремы.

---

*) Legendre, *Mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes* въ *Mémoires de l'Academie des sciences*, 1788, p. 486.—Poisson, *Note sur le mouvement de rotation d'un corps solide*, 1834.

Если нѣсколько поверхностей втораго порядка A, A', A'', и т. д. имѣютъ одинаковыя линіи эксцентрицитетовъ и если около неподвижной точки S будемъ вращать сѣкущую, которая пересѣкаетъ поверхость A въ точкахъ a, a', и откладывать на ней отъ точки S отрѣзки $Sm=\delta.\frac{D^2}{Sa-Sa'}$, *гдѣ D означаетъ діаметръ поверхности A, параллельный хордѣ aa' и δ есть величина постоянная, то конецъ этого отрѣзка m будетъ лежать на поверхности Σ, имѣющей центръ въ точкѣ S;*

Для другихъ поверхностей A', A'', и т. д. получимъ подобнымъ же образомъ другія поверхности Σ', Σ'' и т. д. съ другими постоянными δ', δ'' и т. д.

Всѣ поверхности Σ, Σ', Σ'' и т. д. будутъ имѣть одинаковыя по направленію главныя оси;

И постоянныя δ', δ'' и т. д. можно выбрать такъ, чтобы онѣ имѣли также одинаковыя линіи эксцентрицитетовъ.

§ 3. Системы поверхностей втораго порядка, имѣющихъ однѣ и тѣ же линіи эксцентрицитетовъ.

46. «На плоскости можно провести безчисленное множество коническихъ сѣченій, имѣющихъ общими фокусами двѣ данныя точки; они образуютъ два ряда: эллипсовъ и гиперболъ; каждый эллипсъ съ каждою гиперболой пересѣкается подъ прямымъ угломъ въ четырехъ точкахъ».

Точно также: *можно провести безчисленное множество поверхностей втораго порядка, имѣющихъ общею линіею эксцентрицитетовъ данное коническое сѣченіе: всѣ эти поверхности распадаются на три группы; первую составляютъ эллипсоиды, вторую—гиперболоиды съ одною полостью, третью—гиперболоиды съ двумя полостями.*

Каждыя двѣ поверхности, принадлежащія къ различнымъ группамъ, пересѣкаются между собою подъ прямымъ угломъ и кривая пересѣченія есть линія кривизны для обѣихъ поверхностей.

Каждыя три поверхности, принадлежащія къ тремъ группамъ, пересѣкаются межбу собою въ восьми точкахъ.

Въ каждой такой точкѣ нормали трехъ поверхностей суть главныя оси конуса, вершина котораго лежитъ въ этой точ-

къ и который проходитъ чрезъ одну изъ общихъ тремъ поверхностямъ линій эксцентрицитетовъ.

Двѣ образующія гиперболоида съ одною полостью, проходящія черезъ эту точку, суть фокальныя линіи конуса.

47. «Коническія сѣченія, описанныя изъ однихъ и тѣхъ же фокусовъ, обладаютъ всѣми свойствами системы коническихъ сѣченій, вписанныхъ въ одинъ и тотъ же четыреугольникъ: стороны четыреугольника здѣсь мнимыя, но двѣ изъ противоположенныхъ вершинъ его—дѣйствительны: это именно—фокусы; прямую, соединяющую эти точки, можно разсматривать, какъ одно изъ коническихъ сѣченій, вписанныхъ въ четыреугольникъ».

Это основное свойство коническихъ сѣченій, имѣющихъ одни и тѣ же фокусы, уже было употребляемо Понселе и можетъ служить источникомъ множества свойствъ кривыхъ этого рода; изъ послѣднихъ же свойствъ могутъ вытекать, какъ частные случаи, свойства фокусовъ въ отдѣльныхъ коническихъ сѣченіяхъ.

Точно также: *поверхности, имѣющія однѣ и тѣ же линіи эксцентрицитетовъ, можно разсматривать, какъ вписанныя въ одну и ту же огибающую поверхность. Поверхность эта—мнимая, но двѣ ея линіи стягиванія (lignes de striction)—дѣйствительны: это—двѣ общія всѣмъ поверхностямъ линіи эксцентрицитетовъ; двѣ другія линіи стягиванія—мнимыя: одна изъ нихъ есть третья линія эксцентрицитетовъ поверхностей (та, которая лежитъ въ плоскости наименьшей и средней главной оси), другая же находится въ безконечности.*

Прибавимъ къ этому, что *дѣйствительныя линіи стягиванія можно разсматривать, какъ поверхности, имѣющія одну изъ осей равную нулю и принадлежащія къ системѣ данныхъ поверхностей.*

48. Такимъ образомъ:

Поверхности втораго порядка, имѣющія однѣ и тѣ же линіи эксцентрицитетовъ, и эти двѣ кривыя, разсматриваемыя какъ безконечно сжатыя поверхности, обладаютъ

всѣми свойствами системы поверхностей втораго порядка, вписанныхъ въ одну огибающую поверхность.

Во всей теоріи поверхностей, описанныхъ изъ однихъ и тѣхъ же фокусовъ, эта теорема кажется мнѣ самою плодовитою и важною. Изъ нея выводится очень легко множество свойствъ такихъ поверхностей.

49. Такая система поверхностей уже встрѣчалась при различныхъ изслѣдованіяхъ; именно, и это довольно замѣчательно, въ вопросахъ физики и механики этотъ путь приводилъ къ открытію нѣкоторыхъ изъ ихъ свойствъ. Но эти свойства, незначительныя по числу, оставались разрозненными и не было попытокъ подвестя ихъ подъ какую-нибудь теорію, относящуюся къ поверхностямъ втораго порядка вообще, или подъ какое-нибудь другое основное начало.

50. Слѣдующія предложенія суть слѣдствія этой теоремы.

Если къ поверхностямъ втораго порядка съ одинаковыми линіями эксцентрицитетовъ проведемъ какую-нибудь сѣкущую плоскость, пересѣкающую поверхности по коническимъ сѣченіямъ, и будемъ разсматривать эти коническія сѣченія, какъ кривыя прикосновенія конусовъ, соотвѣтственно описанныхъ около поверхностей, то вершины всѣхъ конусовъ будутъ лежать на прямой, перпендикулярной къ сѣкущей плоскости.

Или, выражаясь иными словами и съ большею общностью:

Полюсы сѣкущей плоскости, взятые относительно поверхстей, лежашъ на прямой, перпиндикулярной къ этой плоскости.

51. Такъ какъ линіи эксцентрицитетовъ можно разсматривать также какъ двѣ безконечно сжатыя поверхности, то отсюда выводимъ слѣдующее свойство этихъ кривыхъ:

Если къ двумъ линіямъ эксцентрицитетовъ поверхности втораго порядка проведемъ сѣкущую плоскость и возьмемъ полюсы прямыхъ пересѣченія ея съ плоскостями этихъ коническихъ сѣченій относительно этихъ же кривыхъ, то прямая, соединяющая два полюса, будетъ перпендикулярна къ сѣкущей плоскости.

Если сѣщущая плоскость касается поверхности втораго порядка, то прямая эта будетъ нормаль къ поверхности въ точкѣ прикосновенія.

52. *Если черезъ какую-нибудь прямую въ пространствѣ проведемъ касательныя плоскости къ поверхностямъ втораго порядка, имѣющимъ однѣ и тѣ же линіи эксцентрицитетовъ, то нормали къ поверхностямъ, проведенныя въ точкахъ прикосновенія, образуютъ гиперболическій параболоидъ.*

53. Если прямая, черезъ которую проводятся касательныя плоскости, нормальна къ одной изъ поверхностей, то парабалоидъ обращается въ коническое сѣченіе и точки прикосновенія касательныхъ плоскостей къ поверхностямъ лежатъ на плоской кривой четвертаго порядка.

Если же прямая расположена какъ нибудь въ одной изъ главныхъ плоскостей поверхности, то точки прикосновенія лежатъ на кругѣ.

54. *Если какую угодно точку пространства будемъ разсматривать какъ вершину конусовъ, описанныхъ около поверхностей съ одинаковыми линіями эксцентрицитетовъ, то плоскости кривыхъ прикосновенія будутъ огибать нѣкоторую развертывающуюся поверхность, имѣющую то свойство, что каждая ея касательная плоскость пересѣкаетъ ее по коническому сѣченію. Три главныя плоскости поверхностей и три главныя плоскости описанныхъ конусовъ (n° 32) суть касательныя плоскости этой развертывающейся поверхности.*

Поверхность эта—четвертаго порядка и ея ребро возврата (arête de rebroussement) есть кривая двоякой кривизны третьяго порядка.

55. *Если изъ какой-нибудь точки пространства проведемъ нормали къ поверхностямъ, имѣющимъ однѣ и тѣ же линіи эксцентрицитетовъ, то:*

1. *Норма ли эти образуютъ конусъ втораго порядка;*

2. *Касательныя плоскости, проведенныя чрезъ основанія нормалей, образуютъ развертывающуюся поверхность четвертаго порядка.*

56. *Если изъ точки, взятой въ одной изъ главныхъ плоскостей поверхностей съ одинаковыми линіями эксцентрицитетовъ, проведемъ нормали къ этимъ поверхностямъ, то:*

1. *Всѣ эти нормали будутъ лежать въ двухъ плоскостяхъ, изъ которыхъ одна есть эта самая главная плоскость, а другая—къ ней перпендикулярная.*

2. *Основанія нормалей въ главной плоскости будутъ лежать на кривой третьяго порядка, которую Кетле назвалъ фокальною линіею съ узломъ (focale à noeud)* [304].

3. *Основанія нормалей, получаемыхъ во второй плоскости, лежатъ на окружности, діаметромъ который служитъ перпендикуляръ, опущенный изъ взятой въ главной плоскости точки на поляру ея относительно линіи эксцентрицитетовъ, лежащей въ той же плоскости.*

4. *Касательныя плоскости, проведенныя черезъ основанія первыхъ нормалей, огибаютъ параболическій цилиндръ, а тѣ, которыя проведены черезъ основанія вторыхъ нормалей, проходятъ всѣ черезъ одну прямую, лежащую въ главной плоскости.*

Если черезъ взятую неподвижную точку вообразимъ коническое сѣченіе, концентрическое, подобное и подобно расположенное съ линіею эксцентрицитетовъ, то плоскость, въ которой лежатъ вторыя нормали, будетъ нормальна къ этому коническому сѣченію.

57. *Если къ поверхностямъ, имѣющимъ однѣ и тѣ же линіи эксцентрицитетовъ, проведемъ параллельныя между собою нормали, то основанія этихъ нормалей будутъ лежать на равносторонней гиперболѣ, одна асимптота которой параллельна направленію нормалей.*

58. *Если къ поверхностямъ, имѣющимъ однѣ и тѣ же линіи эксцентрицитетовъ, проведемъ какую-нибудь сѣкущую*

---

[304]) Кетле нашелъ эту кривую, какъ геометрическое мѣсто въ кривыхъ получаемыхъ на прямомъ конусѣ отъ пересѣченія его плоскостями, проходящими черезъ одну и ту же касательную конуса, перпендикулярную къ его образующей.

плоскость и построимъ всѣ нормали поверхности, которыя лежатъ въ этой плоскости, то:

1. *Нормали эти будутъ огибать коническое сѣченіе.*

2. *Касательныя плоскости, проведенныя чрезъ основанія этихъ нормалей, будутъ проходить черезъ одну прямую.*

3. *Основанія нормалей образуютъ на поверхностяхъ кривую третьяго порядка, именно фокальную линіею съ узломъ.*

59. Извѣстно, что вершина прямаго угла, стороны котораго скользятъ по двумъ коническимъ сѣченіямъ, описаннымъ изъ однихъ и тѣхъ же фокусовъ, описываетъ окружность; точно также:

Если три взаимно перпендикулярныя плоскости касаются соотвѣтственно трехъ поверхностей втораго порядка, имѣющихъ однѣ и тѣ же линіи эксцентрицитетовъ, то точка пересѣченія этихъ трехъ плоскостей лежитъ на поверхности шара.

Бобилье уже доказалъ аналитически это свойство трехъ поверхностей, главныя сѣченія которыхъ описаны изъ однихъ и тѣхъ же фокусовъ. (*Annales des mathématiques*, t. XIX, p. 329).

60. Изложенныя въ этомъ Примѣчаніи теоремы суть наиболѣе важныя изъ найденныхъ нами относительно *линій эксцентрицитетовъ* въ поверхностяхъ втораго порядка. Намъ оставалось бы еще показать, что эта новая теорія должна сдѣлаться полезнымъ элементомъ раціональной геометріи; но Примѣчаніе это вышло уже слишкомъ длинно и потому, изъ числа вопросовъ, въ которыхъ теорія эта можетъ имѣть примѣненіе, мы ограничимся здѣсь указаніемъ только трехъ слѣдующихъ, изъ которыхъ безъ труда можно получить множество различныхъ предложеній:

1. Распредѣленіе въ пространствѣ главныхъ осей и фокальныхъ линій всѣхъ конусовъ, проводимыхъ черезъ одно коническое сѣченіе, или описываемыхъ около одной поверхности втораго порядка.

2. Распредѣленіе въ пространствѣ главныхъ осей всѣхъ эллипсоидовъ, центры которыхъ лежатъ въ различныхъ точкахъ пространства, а три сопряженные діаметра оканчиваются въ трехъ данныхъ точкахъ.

3. Наконецъ, распредѣленіе въ пространствѣ всѣхъ постоянныхъ осей вращенія твердаго тѣла и величины моментовъ инерціи тѣла относительно этихъ осей.

ПРИМѢЧАНІЕ XXXII.

(Пятая эпоха, n° 49).

Теоремы о поверхностяхъ втораго порядка, соотвѣтствующія теоремамъ Паскаля и Бріаншона въ коническихъ сѣченіяхъ.

---

1. Представимъ себѣ шестиугольникъ, вписанный въ коническое сѣченіе. Три его стороны нечетнаго порядка, будучи продолжены до пересѣченія, образуютъ треугольникъ; три же стороны четнаго порядка представляютъ три хорды коническаго сѣченія, лежащія въ трехъ углахъ этого треугольника. Теорема Паскаля выражаетъ, что *три эти хорды пересѣкаются съ противоположными сторонами треугольника въ трехъ точкахъ, лежащихъ на одной прямой.*

Такимъ образомъ въ Паскалевой теоремѣ можно, вмѣсто шестиугольника, разсматривать треугольникъ, начерченный въ плоскости коническаго сѣченія.

Смотря на теорему Паскаля съ этой точки зрѣнія, мы распространимъ ее на поверхности втораго порядка и эта соотвѣтственная теорема будетъ выражать собою свойство тетраэдра, ребра котораго пересѣкаютъ поверхность втораго порядка.

2. Вотъ въ чемъ заключается эта теорема:

Пусть шесть реберъ какого-нибудь тетраэдра пересѣкаются съ поверхностью втораго порядка въ двѣнадцати точкахъ; тогда эти точки лежатъ по три въ четырехъ плоскостяхъ, изъ которыхъ каждая заключаетъ въ себѣ три точки, принадлежащія тремъ ребрамъ, выходящимъ изъ одной вершины тетраэдра.

Эти четыре плоскости пересѣкаются соотвѣтственно съ гранями тетраэдра, противоположными вышеупомянутымъ вершинамъ, по четыремъ прямымъ, представляющимъ четыре образующія одной системы гиперболоида съ одною полостью.

Подобныхъ системъ четырехъ плоскостей, заключающихъ въ себѣ по три точки пересѣченія реберъ тетраэдра съ поверхностью, будетъ нѣсколько и для каждой изъ нихъ будетъ справедлива эта теорема. Если, напримѣръ, четыре вершины тетраэдра лежатъ внутри поверхности, то четыре вышеупомянутыя плоскости можно взять такъ, чтобы каждая изъ нихъ заключала въ себѣ точки встрѣчи съ поверхностію самихъ реберъ, выходящихъ изъ одной вершины, а не продолженій ихъ.

Это свойство тетраэдра въ отношеніи къ поверхности втораго порядка соотвѣтствуетъ, какъ намъ кажется, свойству треугольника, начерченнаго въ плоскости коническаго сѣченія,—свойству, выражаемому теоремою Паскаля. Съ этой точки зрѣнія мы разсматриваемъ предыдущую теорему, какъ соотвѣтствующую теоремѣ Паскаля.

Когда шесть реберъ тетраэдра касаются поверхности втораго порядка, то существуетъ только одна система четырехъ плоскостей, заключающихъ въ себѣ по три изъ шести точекъ прикосновенія, и теорема измѣняется въ слѣдующую.

3. *Пусть шесть реберъ тетраэдра касаются поверхности втораго порядка; тогда плоскость, содержащая три точки прикосновенія реберъ, выходящихъ изъ одной вершины, пересѣкается съ гранью тетраэдра, противоположной этой вершинѣ, по прямой линіи и четыре такимъ образомъ опредѣлен-*

ныя прямыя суть образующія одного гиперболоида съ одною полостью. [305]).

4. Если тетраэдръ вписанъ въ поверхность втораго порядка, то каждую вершину его можно разсматривать, какъ лежащую внѣ поверхности на безконечно близкомъ разстояніи отъ нея: три точки встрѣчи съ поверхностію трехъ реберъ, выходящихъ изъ вершины, опредѣляютъ въ этомъ случаѣ касательную плоскость въ вершинѣ и отсюда мы выводимъ слѣдующую теорему:

Если тетраэдръ вписанъ въ поверхность втораго порядка, то касательныя плоскости въ его вершинахъ пересѣкаются съ противоположными гранями по четыремъ прямымъ, представляющимъ образующія гиперболоида съ одною полостью [306]).

5. Теорема Бріаншона состоитъ въ томъ, что *въ каждомъ шестиугольникѣ, описанномъ около коническаго сѣченія, три діагонали, соединяющія противоположныя вершины, проходятъ черезъ одну и ту же точку.* Вершины нечетнаго порядка, разсматриваемыя отдѣльно, опредѣляютъ собою треугольникъ, имѣющій совершенно произвольное положеніе относительно коническаго сѣченія. Каждая вершина четнаго порядка будетъ при этомъ точкою пересѣченія двухъ касательныхъ, проведенныхъ изъ двухъ вершинъ треугольника; соединяя каждую такую точку съ третьею вершиною треугольника, получимъ, слѣдовательно, три прямыя, проходящія черезъ одну точку. Эта теорема есть только другое выраженіе теоремы Бріаншона и въ этомъ видѣ она представляетъ свойство какого угодно треугольника въ плоскости коническаго сѣченія.

6. Точно также въ пространствѣ имѣемъ теорему:

---

[305] Въ *Annales des mathématiques* T. XIX, p, 79, я вывелъ эту теорему изъ болѣе общей, отличающейся отъ предыдущей.

[306]) Эта теорема уже была доказана различнымъ образомъ Штейнерамъ и Бобилье (*Annales des mathématiques*, T. XVIII, p. 336) и потомъ нами (ibid. T. XIX, p. 67).

Положимъ, что черезъ ребра тетраэдра, помѣщеннаго какъ угодно въ пространствѣ, проведены двѣнадцать касательныхъ плоскостей къ поверхности втораго порядка; эти двѣнадцать плоскостей пересѣкаются между собою по три въ четырехъ точкахъ, изъ которыхъ каждая есть точка пересѣченія трехъ плоскостей, проведенныхъ черезъ ребра, принадлежащія къ одной грани тетраэдра.

Прямыя, соединяющія эти четыре точки съ вершинами, противоположными вышеупомянутымъ гранямъ, представляютъ четыре образующія одной группы въ нѣкоторомъ гиперболоидѣ съ одною полостью.

Эту теорему можно разсматривать какъ соотвѣтствующую въ пространствѣ теоремѣ Бріаншона.

Здѣсь можно различнымъ образомъ составить систему четырехъ точекъ, представляющихъ точки пересѣченія касательныхъ плоскостей поверхности втораго порядка.

7. Если ребра тетраэдра касаются поверхности, то система четырехъ точекъ будетъ только одна и теорема превратится въ слѣдующую:

Положимъ, что шесть реберъ тетраэдра касаются поверхности втораго порядка; касательныя плоскости, проведенныя черезъ ребра, принадлежащія къ одной грани, пересѣкаются между собою въ нѣкоторой точкѣ; если подобныя точки соединимъ съ вершинами, противоположными соотвѣтственнымъ гранямъ, то получимъ четыре прямыя, представляющія образующія одной группы въ нѣкоторомъ гиперболоидѣ съ одною полостью.

8. Если данный тетраэдръ описанъ около поверхности, то общая теорема приводитъ къ такому частному предложенію:

Если тетраэдръ описанъ около поверхности втораго порядка, то прямыя, соединяющія его вершины съ точками прикосновенія противоположныхъ граней, суть четыре образующія одной группы въ нѣкоторомъ гиперболоидѣ съ одною полостью.

9. Сопоставленіе тетраэдра и поверхности втораго порядка, помѣщенныхъ какъ угодно въ пространствѣ, ведетъ

еще ко многимъ другимъ свойствамъ, отличающимся отъ тѣхъ, которыя выражены въ общихъ теоремахъ n^o2 и n^o6, и соотвѣтствующимъ также извѣстнымъ теоремамъ геометріи на плоскости. Приведемъ здѣсь слѣдующую двойную теорему, которую мы доказали въ *Annales* de Gergonne (T. XIX, p. 76) и которая, кажется, богаче по своимъ слѣдствіямъ, нежели теоремы n^o2 и n^o6:

Представимъ себѣ, что въ пространствѣ даны тетраэдръ и поверхность втораго порядка; тогда:

1. *Прямыя, соединяющія вершины тетраэдра съ полюсами противоположныхъ граней, взятыми относительно поверхности, будутъ четыре образующія одной группы одного гиперболоида.*

2. *Линіи пересѣченія граней тетраэдра съ полярными плоскостями противоположныхъ вершинъ будутъ четыре образующія одной группы другаго гиперболоида.*

10. Къ этой же теоріи можно отнести еще слѣдующее общее свойство тетраэдра.

Положимъ, что въ пространствѣ даны тетраэдръ и поверхность втораго порядка; тогда:

1. *Полярная плоскость каждой вершины тетраэдра относительно поверхности, пересѣкается съ тремя ребрами, исходящими изъ этой вершины, въ трехъ точкахъ; такимъ образомъ на ребрахъ тетраэдра получаемъ двѣнадцать точекъ, которыя будутъ лежать на одной поверхности втораго порядка.*

2. *Если черезъ полюсъ каждой грани тетраэдра, взятый относительно поверхности, проведемъ три плоскости, проходящія черезъ три ребра этой грани, то получимъ двѣнадцать плоскостей, которыя будутъ касаться одной поверхности втораго порядка.*

11. Изъ четырехъ общихъ теоремъ, n^on^o2, 6, 9 и 10, находящихся въ этомъ Примѣчаніи, двѣ послѣднія. суть двойныя, такъ какъ каждая изъ нихъ заключаетъ въ себѣ двѣ части, которыя можно разсматривать какъ отдѣльныя те-

оремы. Двѣ первыя теоремы мы можемъ изложить съ такою же полнотою, если только не захотимъ ограничиваться совершенною аналогіею ихъ съ теоремами Паскаля и Бріаншона. Для пополненія этихъ теоремъ мы вводимъ въ каждой изъ нихъ другой тетраэдръ, грани и вершины котораго были бы соотвѣтственными съ гранями и вершинами даннаго; тогда:

1. *Соотвѣтственныя грани двухъ тетраэдровъ попарно пересѣкаются по четыремъ прямымъ, представляющимъ образующія одной группы нѣкотораго гиперболоида.*

2. *Соотвѣтственныя вершины двухъ тетраэдровъ лежатъ попарно на четырехъ прямыхъ, представляющихъ образующія одной группы другаго гиперболоида.*

ПРИМѢЧАНІЕ XXXIII.

(Пятая эпоха, n° 50.)

Соотношеніе между шестью точками кривой двоякой кривизны третьяго порядка. Различныя задачи, въ которыхъ встрѣчается эта кривая.

---

1. *Черезъ шесть данныхъ въ пространствѣ точекъ можно провести кривую двоякой кривизны третьяго порядка.*

Въ самомъ дѣлѣ, мы можемъ разсматривать одну изъ данныхъ точекъ какъ вершину конуса, проходящаго черезъ пять его образующихъ. Точно также можно построить другой конусъ, имѣющій вершину въ какой-нибудь двугой изъ данныхъ точекъ и проходящій черезъ пять остальныхъ. Оба конуса будутъ имѣть общую образующую, именно прямую, соединяющую двѣ точки, принятыя за вершины; слѣдовательно они будутъ пересѣкаться по кривой двоякой кривизны третьяго порядка, которая вмѣстѣ съ вышеупомянутою прямою составляетъ полную линію четвертаго порядка, представляющую пересѣченіе двухъ конусовъ. Кривая пройдетъ

черезъ шесть данныхъ точекъ, которыя лежатъ на обоихъ конусахъ: теорема такимъ образомъ доказана.

2. Замѣтимъ, что всякій другой конусъ, кромѣ этихъ двухъ, имѣющій вершину на кривой двоякой кривизны третьяго порядка и проходящій черезъ эту кривую, будетъ также конусъ втораго порядка. Это потому, что всякая плоскость, проведенная черезъ его вершину, будемъ пересѣкаться съ кривою еще въ двухъ точкахъ, т.-е. съ конусомъ по двумъ образующимъ, а это и доказываетъ, что конусъ будетъ втораго порядка.

Итакъ, можемъ сказать, что

Геометрическое мѣсто вершины конусовъ втораго порядка, проходящихъ черезъ шесть данныхъ въ пространствѣ точекъ, есть кривая двоякой кривизны третьяго порядка, опредѣляемая этими шестью точками.

3. Разсмотримъ на кривой двоякой кривизны третьяго порядка, опредѣляемой шестью точками, какую-нибудь седьмую точку; пусть a, b, c, d, e, f, будутд шесть данныхъ и g—седьмая точка. Эти семь точекъ, взятыя въ какомъ угодно порядкѣ, представляютъ вершины косаго семиугольника (*eptagone gauche*), въ которомъ каждой сторонѣ противоположна вершина соотвѣтственнаго угла. Представимъ себѣ, что вершины идутъ въ томъ же порядкѣ какъ изображающія ихъ буквы a, b, c, d, e, f, g; тогда четвертая сторона de будетъ противоположна первой вершинѣ a, пятая сторона ef—второй вершинѣ b и т. д.

Соотношенія, которыя должны существовать между семью точками a, b, c, и пр. чтобы эти точки принадлежали кривой двоякой кривизны третьяго порядка, выражаются слѣдующей теоремой:

Если вершины косаго семиугольника a, b, c, и т. д. лежатъ на кривой двоякой кривизны третьяго порядка, то плоскость какого-нибудь угла а семиугольника и плоскости двухъ рядомъ лежащихъ угловъ b и g пересѣкаютъ противу-

лежащія стороны въ трехъ точкахъ, находящихся въ плоскости, проходящей черезъ вершину перваго угла a.

4. Достаточно, чтобы это свойство семиугольника вписаннаго въ кривую двоякой кривизны третьяго порядка имѣло мѣсто для двухъ угловъ; тогда оно будетъ справедливо и для остальныхъ угловъ. Отсюда заключаемъ:

Если косой семиугольникъ таковъ, что плоскость одного угла и плоскости двухъ ближайшихъ угловъ пересѣкаются съ противоположными сторонами въ трехъ точкахъ, лежащихъ въ плоскости, проходящей черезъ вершину перваго угла, и если то же самое имѣетъ мѣсто еще для одного изъ остальныхъ шести угловъ; то это же будетъ справедливо для пяти другихъ угловъ и черезъ семь вершинъ семиугольника можно тогда провести кривую двоякой кривизны третьяго порядка.

5. На основаніи этой теоремы легко построить по точкамъ, при помощи только прямыхъ линій, кривую двоякой кривизны третьяго порядка, проходящую черезъ шесть данныхъ точекъ. Для этой цѣли опредѣляемъ именно точку пересѣченія съ кривою каждой плоскости, проходящей черезъ двѣ изъ данныхъ шести точекъ.

Таже теорема ведетъ къ рѣшенію многихъ другихъ задачъ, напр. къ опредѣленію касательныхъ линій и соприкасающихся плоскостей кривой въ каждой изъ данныхъ точекъ и т. п.

Мы не будемъ входить въ подробности относительно построенія кривой двоякой кривизны третьяго порядка, а укажемъ только на нѣкоторыя задачи, въ которыхъ она встрѣчается. До сихъ поръ на нее не обращали почти никакого вниманія при геометрическихъ изысканіяхъ и предлагаемые нами примѣры того важнаго значенія, которое имѣетъ эта кривая во многихъ вопросахъ, докажутъ, можетъ быть, что было бы очень полезно обратиться къ ея изученію и что медлить этимъ не слѣдуетъ.

6. *Если четыре грани подвижнаго тетраэдра должны проходить черезъ четыре прямыя, данныя гдѣ угодно въ простран-*

ствѣ, и если три вершины его должны лежать на трехъ другихъ прямыхъ, расположенныхъ также произвольно въ пространствѣ, то четвертая вершина тетраэдра будетъ описывать кривую двоякой кривизны третьяго порядка.

Этой теоремѣ соотвѣтствуетъ въ геометріи на плоскости то построеніе коническихъ сѣченій, которое было доказано Маклореномъ и Брайкенриджемъ и изъ котораго выводится теорема Паскаля о шестиугольникѣ.

7. *Представимъ себѣ въ пространствѣ три произвольныя точки и три произвольныя плоскости; черезъ данную неподвижную прямую будемъ проводить сѣкущую плоскость, которая будетъ пересѣкаться съ тремя данными плоскостями по тремъ прямымъ; если черезъ эти три прямыя проведемъ три новыя плоскости, проходящія соотвѣтственно черезъ три данныя точки, то геометрическимъ мѣстомъ пересѣченія такихъ трехъ плоскостей будетъ кривая двоякой кривизны третьяго порядка.*

Эту теорему можно разсматривать, какъ соотвѣтствующую тому же предложенію геометріи на плоскости, какъ и предыдущая.

8. *Если три двугранные угла, ребра которыхъ имѣютъ неизмѣнное положеніе въ пространствѣ, вращаются около своихъ реберъ такъ, что точка пересѣченія трехъ граней лежитъ постоянно на данной прямой, то точка пересѣченія трехъ остальныхъ граней описываетъ кривую двоякой кривизны третьяго порядка, опирающуюся на ребра трехъ данныхъ подвижныхъ угловъ.*

Теорема эта аналогична съ теоремою Ньютона объ органическомъ образованіи коническихъ сѣченій посредствомъ пересѣченія сторонъ двухъ подвижныхъ угловъ. И подобно тому, какъ теорема Ньютона есть только частный случай болѣе общаго построенія коническихъ сѣченій, показаннаго нами въ Примѣчаніи XV,—вышеприведенная теорема есть только частный случай болѣе общаго предложенія объ образованіи кривыхъ двоякой кривизны третьяго порядка.

9. Предложеніе это таково:

Примемъ три хорды кривой двоякой кривизны третьяго порядка за ребра трехъ двугранныхъ угловъ, произвольныхъ по величинѣ и вращающихся около своихъ реберъ; если точка пересѣченія трехъ граней этихъ угловъ будетъ двигаться по данной кривой двоякой кривизны третьяго порядка, то точка пересѣченія трехъ остальныхъ граней будетъ описывать другую кривую двоякой кривизны третьяго порядка, опирающуюся на три взятыя хорды первой.

10. Къ той же теоріи относится еще слѣдующая теорема.

Представимъ себѣ, что три точки движутся по тремъ прямымъ въ пространствѣ съ произвольными постоянными скоростями; если черезъ эти точки и черезъ соотвѣтственно имъ взятыя три произвольныя неподвижныя прямыя будемъ проводить плоскости, то точка пересѣченія такихъ плоскостей будетъ описывать кривую двоякой кривизны третьяго порядка, опирающуюся на три прямыя, черезъ которыя проводятся эти плоскости.

11. Излагаемыя далѣе теоремы относятся къ различнымъ другимъ теоріямъ.

Если нѣсколько поверхностей втораго порядка проходятъ черезъ восемь данныхъ точекъ, то центры ихъ лежатъ на кривой двоякой кривизны третьяго порядка.

Или общѣе: *полюсы всякой плоскости, взятые относительно этихъ поверхностей, лежатъ на кривой двоякой кривизны третьяго порядка.*

12. *Представимъ себѣ тѣло, находящееся въ движеніи; требуется найти тѣ точки тѣла, которыя въ данное мгновеніе имѣютъ движенія, направленныя къ какой-нибудь данной точкѣ, т.-е. такія точки, для которыхъ касательныя къ траэкторіямъ проходятъ черезъ данную точку: искомыя точки расположены по кривой двоякой кривизны третьяго порядка и касательныя къ ихъ траэкторіямъ образуютъ конусъ втораго порядка.*

13. Представимъ себѣ систему силъ, дѣйствующихъ на тѣло; для каждой точки m пространства вообразимъ главную плоскость этой системы силъ относительно этой точки и перпендикуляръ изъ m на главную плоскость: тогда

Перпендикуляры, проходящіе черезъ данную точку пространства, образуютъ конусъ втораго порядка и точки m, черезъ которыя они проводятся, расположены на кривой двоякой кривизны третьяго порядка.

14. Касательныя въ различныхъ точкахъ кривой двоякой кривизны третьяго порядка образуютъ развертывающуюся поверхность четвертаго порядка. Обратно: *каждая развертывающаюся повёрхность четвертаго порядка имѣетъ ребромъ возврата (arête de rebroussement) кривую двоякой кривизны третьяго порядка.*

Поэтому можно къ этой же теоріи отнести различные вопросы, въ которыхъ входитъ развертывающаяся поверхность четвертаго порядка; напримѣръ слѣдующіе:

15. *Въ пространствѣ дано шесть произвольно расположенныхъ плоскостей; требуется построить коническое сѣченіе, которое касалось бы этихъ шести плоскостей; требованію удовлетворяетъ безчисленное множество коническихъ сѣченій и ихъ плоскости огибаютъ развертывающуюся поверхность четвертаго порядка.*

16. *Если четыре вершины измѣняющагося тетраэдра движутся по четыремъ неподвижнымъ прямымъ, а три грани его проводятся черезъ три другія данныя прямыя, то четвертая грань скользитъ по разгибающейся поверхности четвертаго порядка.*

17. *Въ пространствѣ даны три точки и три плоскости; если вершина трегранняго угла, ребра котораго вращаются около трехъ данныхъ точекъ, движется по прямой линіи, то точки пересѣченія этихъ реберъ съ тремя данными плоскостями лежатъ въ плоскости, скользящей по развертывающейся поверхности четвертаго порядка.*

18. *Если три точки движутся по тремъ прямымъ съ произвольными, но постоянными, скоростями, то плоскость,*

опредѣляемая этими точками, скользитъ по разгибающейся поверхности четвертаго порядка,

19. *Представимъ себѣ рядъ поверхностей втораго порядка, касающихся восьми данныхъ плоскостей; если какую-нибудь точку пространства примемъ за вершину конусовъ, описанныхъ около этихъ поверхностей, то плоскости кривыхъ прикосновенія будетъ огибать развертывающуюся поверхность четвертаго порядка.*

20. *Около поверхности втораго порядка можно описать безчисленное множество конусовъ; если будемъ искать такіе конусы, одна изъ главныхъ осей которыхъ проходитъ черезъ данную точку, то окажется, что всѣ эти главныя оси образуютъ конусъ втораго порядка и что плоскости, проведенныя черезъ вершины огибающихъ конусовъ перпендикулярно къ этимъ осямъ, огибаютъ развертывающуюся поверхность четвертаго порядка.*

21. Представимъ себѣ данное твердое тѣло; чрезъ каждую точку пространства можно провести три прямыя, которыя будутъ постоянными осями вращенія тѣла относительно этой точки, и безчисленное множество другихъ прямыхъ, представляющихъ постоянныя оси вращенія тѣла относительно различныхъ точекъ, взятыхъ на этихъ прямыхъ; тогда:

1) *Всѣ эти прямыя образуютъ конусъ втораго порядка.*

2) *Плоскости, проведенныя перпендикулярно къ этимъ прямымъ черезъ тѣ точки, для которыхъ онѣ служатъ постоянными осями вращенія, огибаютъ развертывающуюся поверхность четвертаго порядка.*

22. Когда твердое тѣло находится въ движеніи, каждая плоскость, взятая въ тѣлѣ, скользитъ по разгибающейся поверхности, прикасаясь къ ней послѣдовательно по различнымъ ея образующимъ *(arêtes)*; эту поверхность мы назовемъ *развертывающеюся траэкторіей* плоскости. Въ каждый моментъ движенія всѣ плоскости, проводимыя въ тѣлѣ, имѣютъ съ своими развертывающимися траэкторіями общую прямую.

Если будемъ искать тѣ изъ этихъ прямыхъ, которыя для даннаго момента движенія лежатъ въ данной плоскости, то окажется, что всѣ такія прямыя огибаютъ параболу и всѣ плоскости, которыя прикасатся къ своимъ развертывающимся траэкторіямъ по этимъ прямымъ, обвертываютъ развертывающуюся поверхность четвертаго порядка.

23. *Когда тѣло находится въ движеніи, касательныя къ траэкторіямъ точекъ, расположенныхъ на прямой линіи, образуютъ гиперболическій параболоидъ; касательныя эти въ разсматриваемое мгновеніе движутся въ плоскостяхъ, огибающихъ развертывающуюся поверхность четвертаго порядка.*

И т. д. и т. д.

ПРИМѢЧАНІЕ XXXIV.

(Глава шестая, n° 10.)

О двойственности въ математикѣ. Примѣры изъ токарнаго искуства и изъ началъ динамики.

---

1. Между различными способами преобразованія, на которыхъ основываются важнѣйшія ученія новой геометріи, мы особенно должны отличить способъ, приводящій къ математическому закону *двойственности.* Не говоря уже о выгодахъ этого способа, какъ средства для открытій, мы замѣчаемъ, что начало, служащее ему основаніемъ, представляетъ собою постоянное соотношеніе, при помощи котораго связываются попарно всѣ геометрическія истины, и вслѣдствіе этого являются, если можно такъ выразиться, два рода геометріи. Эти двѣ геометріи отличаются между собою обстоятельствомъ, на которое весьма важно обратить вниманіе. Въ одной—единицей, элементомъ, или, такъ сказать, атомомъ, для составленія всѣхъ другихъ формъ пространства служитъ точка; такое воззрѣніе лежитъ въ основаніи философіи древнихъ и аналитической геометріи. Въ другой геометріи за перво-

образъ или за единицу для образованія другихъ формъ пространства принимается прямая линія или плоскость, смотря потому относятся ли излѣдованія къ одной плоскости, или ко всему пространству.

Это раздѣленіе всѣхъ свойствъ пространства на два класса, основанное на двухъ существенно различныхъ исходныхъ началахъ, имѣетъ по видимому весьма значительное вліяніе на геометрію, какъ это ясно показали Жергоннъ и Понселе [307]). Но по нашему мнѣнію это вліяніе распространяется также и на многіе другіе отдѣлы математическихъ знаній и намъ кажется, что въ нихъ мы можемъ придти къ подобнымъ же заключеніямъ, если будемъ основываться на прекрасномъ законѣ двойственности и руководствоваться тѣмъ дуализмомъ, который можно считать основнымъ началомъ и исходною точкою геометріи.

Примѣръ этой двойственности можно видѣть въ изданномъ нами сочиненіи о новой *аналитической геометріи*, которая подобна геометріи Декарта, но въ которой роль точки играетъ плоскость [308]).

Таже идея двойственности можетъ найти приложеніе и въ механикѣ. Въ самомъ дѣлѣ, первоначальный элементъ тѣла, къ которому прилагаются первыя основанія этой науки, также какъ и въ древней геометріи,—есть математическая точка. Не въ правѣ ли мы ожидать, что, принявъ за элементъ протяженія не точку, а плоскость, мы придемъ къ новымъ теоріямъ, составляющимъ, такъ сказать, новую науку? И если найдется единственный пріемъ для перехода отъ этой новой науки къ старой,—подобно теоремѣ геометріи о взаимности свойствъ пространства,—то онъ послужитъ основнымъ началомъ двойственности въ наукѣ о движеніи тѣлъ.

---

307) *Annales des mathématiques*, t. XVI, p. 209 et t. XVII, p. 265.

308) Основныя начала этой новой системы координамъ мы изложили кратко въ *Correspondance mathématique* par Quetelet, t. VI, p. 81.

2. Два вышеуказанные примѣра двойственности основываются на двойственномъ способѣ представлять себѣ тѣло, какъ совокупность или точекъ, или плоскостей. Но въ различныхъ отдѣлахъ математики могутъ найтись другіе законы двойственности, основанные на иныхъ началахъ; и я думаю, что этимъ путемъ мы приведены будемъ къ воззрѣнію уже высказанному нами по поводу опредѣленія геометріи въ Примѣчаніи V, т. е. къ убѣжденію, что *постоянная двойственность* есть великій законъ природы, господствующій во всѣхъ частяхъ знанія, во всѣхъ проявленіяхъ человѣческаго духа.

Ограничиваясь здѣсь только областью геометріи, мы, для подтвержденія высказанныхъ идей, укажемъ еще на два весьма различные примѣра двойственности.

3. Первый примѣръ представляется при выдѣлкѣ формъ помощію токарнаго станка.

Для всякой формы, выдѣлываемой токаремъ, мы можемъ себѣ представить двоякій способъ обработки: мы можемъ укрѣпить матеріалъ и заставить орудіе вращаться, или можемъ, какъ поступаетъ токарь на самомъ дѣлѣ, укрѣпить орудіе и сообщить вращательное движеніе матеріалу.

Такимъ образомъ мы видимъ въ пріемахъ этого искуства ясно выраженную и постоянную двойственность. Притомъ знаемъ, что эти пріемы во всякомъ случаѣ основываются на геометрическихъ началахъ; поэтому и въ теоріяхъ этихъ двухъ способовъ обработки будетъ существовать также постоянная двойственность.

Весьма интересенъ, по нашему мнѣнію, вопросъ о математическихъ законахъ, связывающихъ между собою двѣ эти теоріи, т. е. о законахъ, которые одни были бы достаточны для перехода отъ извѣстнаго даннаго пріема обработки помощію токарнаго станка къ другому соотвѣтственному.

Задача эта пугала насъ сначала значительными трудностями, но потомъ привела насъ къ одному въ высшей степени простому закону двойственности, изъ котораго, во первыхъ, вытекаетъ теорія токарнаго станка и, во вторыхъ, получается средство описывать помощію этого снаряда всѣ тѣ

кривыя, которыя до сихъ поръ чертились обыкновенно посредствомъ подвижнаго острія. Этотъ способъ образованія кривыхъ основывается на слѣдующемъ началѣ:

Если плоская фигура перемѣщается въ своей плоскости, то всякая точка ея описываетъ кривую. Движеніе фигуры опредѣляется нѣкоторыми постоянными соотношеніями ея съ неподвижными точками и линіями на плоскости. Совокупность этихъ точекъ и линій представляютъ вторую фигуру, которая остается неподвижною во время движенія первой фигуры.

Разсмотримъ первую фигуру въ одномъ изъ положеній и сдѣлаемъ ее неподвижною; вторую же фигуру заставимъ двигаться такъ, чтобы сохранялись прежнія условія въ ея относительномъ положеніи къ первой фигурѣ.

Тогда неподвижное остріе, помѣщенное въ какой-нибудь точкѣ первой фигуры, будетъ чертитъ на подвижной плоскости второй фигуры кривую линію, тождественную съ той (за исключеніемъ положенія), которую описывала бы взятая точка первой фигуры, если бы эта фигура продолжала двигаться.

Это и есть то единственное начало, которое связываетъ между собою два способа образованія плоскихъ кривыхъ, посредствомъ подвижнаго и неподвижнаго острія.

Чтобы показать приложеніе этого начала, разсмотримъ черченіе эллипса помощію точки, представляющей вершину неизмѣняемаго треугольника, двѣ другія вершины котораго движутся по двумъ неподвижнымъ прямымъ.

Здѣсь подвижная фигура есть треугольникъ; двѣ же данныя прямыя представляютъ фигуру неподвижную. На основаніи нашего начала мы должны перемѣщать эти прямыя такъ, чтобы онѣ постоянно проходили черезъ тѣ двѣ вершины треугольника, которыя первоначально скользили по нимъ. Отсюда выводимъ слѣдующую теорему:

Если стороны подвижнаго угла постоянной величины опираются на двѣ неподвижныя точки, то неподвижное остріе,

помѣщенное въ какой угодно точкѣ, будетъ чертить на движущейся плоскости этого угла эллипсъ.

И мы дѣйствительно замѣчаемъ, что механизмъ при токарномъ станкѣ для выдѣлки оваловъ имѣетъ цѣлію сообщить плоскости такое движеніе, при которомъ стороны угла, находящагося въ этой плоскости, постоянно проходили бы черезъ двѣ неподвижныя точки. Это, слѣдовательно, и есть геометрическое основаніе сказаннаго механизма, изобрѣтеннаго знаменитымъ живописцемъ Леонардо-да-Винчи.

Также просто объясняется изъ нашего начала механизмъ, употребляемый въ токарномъ искуствѣ для эпициклоиды. Мы приходимъ именно къ слѣдующей теоремѣ, на которой, по нашему мнѣнію, и основывается этотъ механизмъ:

Если кривая линія катится въ плоскости по другой кривой, то каждая точка первой описываетъ эпициклоиду, которую можно получить также другимъ способомъ, именно, заставляя катиться вторую кривую по первой; при этомъ остріе, укрѣпленное въ прежней точкѣ первой кривой, будетъ чертить на подвижной плоскости туже самую эпициклоиду, какъ и прежде.

Эллипсъ и эпициклоида, сколько мнѣ извѣстно, суть единственныя кривыя, выдѣлываемыя на токарномъ станкѣ помощію особо приспособленныхъ механизмовъ. При помощи изложеннаго выше способа черченія кривыхъ можно получить подобное же построеніе безконечнаго множества другихъ линій.

Такъ напримѣвъ, для конхоиды Никомеда приходимъ къ такому построенію:

Представимъ себѣ уголъ неизмѣняемой величины, одна сто-которагo постоянно проходитъ черезъ неподвижную точку, другая же скользитъ своимъ концомъ по данной прямой, проведенной черезъ эту точку; неподвижное остріе, укрѣпленное въ какой-нибудь точкѣ послѣдней прямой, будетъ чертить на плоскости подвижнаго угла конхоиду Никомеда.

Если прямая, по которой движется конецъ одной изъ сторонъ угла, не будетъ проходить черезъ неподвижную точку, черезъ которую проводится другая сторона, то укрѣпляя остріе въ надлежащемъ мѣстѣ, получимъ циссоиду Діоклеса; при другомъ положеніи острія получается линія Кетле (*focale à noeud*); вообще же при этимъ будутъ получаться кривыя, *представляющія геометрическое мѣсто основаній перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ какой-нибудь точки на касательныя къ параболѣ.*

Этотъ способъ построенія мы прилагали ко многимъ другимъ кривымъ, разсматриваемыхъ не только какъ послѣдовательность безконечнаго множества точекъ, но даже—какъ обвертка ихъ касательныхъ. Въ послѣднемъ случаѣ кривая получается уже не посредствомъ острея, оставляющаго слѣдъ своего пути на подвижной плоскости, а посредствомъ ножа, обрѣзающаго движущуюся плоскость по желаемой кривой.

Подобные же пріемы могутъ прилагаться и къ фигурамъ трехъ измѣреній.

Такимъ образомъ въ ученіяхъ, служащихъ основаніемъ двоякаго способа механической выдѣлки формъ, обнаруживается *двойственность*, которая также какъ и двойственность свойствъ пространства основывается на одной теоремѣ.

4. Второй примѣръ двойственности мы заимствуемъ изъ системы міра и изъ законовъ механики.

Всѣ небесныя тѣла имѣютъ двоякое движеніе, поступательно и вращательное около оси. Тоже двойственное движеніе мы находимъ въ элементарномъ перемѣщеніи твердаго тѣла, т. е. во всякомъ безконечно—маломъ движеніи его.

Такая совокупность двухъ движеній есть обстоятельство, не представляющее ничего удивительнаго, особенно въ наше время, когда математическая теорія объясняетъ его и сама открыла бы его, если бы оно не было уже извѣстно, какъ результатъ астрономическихъ наблюденій.

Но, если вращательное движеніе въ глазахъ наблюдателя есть такое же очевидное свойство небесныхъ тѣлъ, какъ и

движеніе поступательное, и столько же присущее всему, что подлежитъ дѣйствію силъ вселенной, то геометры изслѣдовали эти два рода движенія не съ одинаковымъ безпристрастіемъ. Они начали съ воззрѣнія, что естественное и элементарное движеніе тѣла есть движеніе поступательное. Въ духѣ этой основной идеи, начало которой восходитъ до времени происхожденія наукъ, Д'Аламбертъ говоритъ слѣдующее въ предварительныхъ замѣчаніяхъ къ *Traité de Dynamique:* «Въ движеніи тѣла мы ясно видимъ только то, что тѣло проходитъ извѣстное пространство и употребляетъ на это извѣстное время. Слѣдовательно это есть единственная идея, изъ которой должны быть выведены всѣ начала механики» и т. д. Можно думать, что такой способъ разсужденія былъ слѣдствіемъ привычки разсматривать какъ элементъ протяженія *точку,* а не *плоскость,* которую напротивъ разсматриваютъ всегда какъ собраніе *точекъ.* Замѣна *движеній силами,* введенная Вариньономъ въ раціональную механику и во многихъ другихъ отношеніяхъ весьма удачная, существенно содѣйствовала по нашему мнѣнію выработкѣ ученій современной механики, основывающихся на первоначальномъ понятіи о точкѣ, какъ объ элементѣ пространства.

Но развѣ нельзя также допустить, что два нераздѣльныя движенія тѣлъ вселенной должны вести къ математическимъ теоріямъ, въ которыхъ оба они играли бы совершенно одинаковыя роли? Въ такомъ случаѣ принципъ, который соединялъ бы двѣ такія теоріи и служилъ бы для перехода отъ одной изъ нихъ къ другой, подобно теоремѣ, на которой мы основали геометрическую *двойственность* неподвижнаго пространства, и подобно той, которая намъ послужила для объединенія двухъ пріемовъ механическаго образованія тѣлъ, этотъ принципъ, говоримъ мы, могъ бы бросить яркій свѣтъ на принципы философіи природы.

Нельзя даже предвидѣть, гдѣ остановились бы слѣдствія изъ такого принципа *двойственности.* Связавъ попарно всѣ явленія природы и управляющіе ими математическіе за-

коны, не восходилъ ли бы онъ до самыхъ причинъ явленій? И не можетъ ли тогда открыться, что закону тяготѣнія соотвѣтствуетъ другой законъ, играющій такую же роль какъ законъ Ньютона и служащій, подобно ему, къ объясненію небесныхъ явленій? Если же, напротивъ, оказалось бы, что законъ тяготѣнія самъ себѣ соотвѣтствуетъ въ обѣихъ теоріяхъ, какъ это бываетъ съ предложеніями геометріи относительно двойственности проствансвенныхъ формъ, то это было бы великимъ подтвержденіемъ, что законъ Ньютона есть дѣйствительно единственной высшій законъ вселенной.

Мы не скрываемъ, что ученіе о центробѣжной силѣ можетъ представить возраженія противъ нашихъ идей, потому что эта сила обусловливаетъ на практикѣ существенное различіе между поступательнымъ и вращательнымъ движеніемъ тѣлъ; но мы оставляемъ эту силу въ сторонѣ, такъ какъ разсматриваемъ только безконечно—малыя движенія. Спѣшимъ подтвердить наши вышеизложенкыя идеи нѣкоторыми соображеніями о томъ, что по нашему мнѣнію уже сдѣлано и можетъ быть продолжаемо въ вопросѣ о предполагаемомъ нами соотношеніи между теоріями поступательнаго и вращательнаго движенія.

5. Эйлеръ первый показалъ, что, если тѣло укрѣплено въ неподвижной точкѣ, то всякое безконечно-малое движеніе его есть вращеніе около нѣкоторой прямой, проходящей черезъ эту неподвижную точку.

Лагранжъ, въ первомъ изданіи *Mécanique analytique* (1788 г.), далъ формулы, служащія для разложенія такого вращательнаго движенія на три другія, именно—на вращенія около трехъ прямоугольныхъ осей, проведенныхъ черезъ неподвижную точку. Эти формулы обнаруживали замѣчательное сходство съ формулами, служащими для разложенія прямолинейнаго движенія точки на три другія прямолинейныя движенія.

Впослѣдстіи Лагранжъ, пополнилъ эту аналогію, показавъ во второмъ изданіи *Mécanique analytique* (1811 г.) геометрическое построеніе трехъ вращеній, замѣняющихъ собою

данное. Построеніе это приводится къ откладыванію на осяхъ вращенія линій пропорціональныхъ вращательнымъ движеніямъ и къ такому же сложенію или разложенію этихъ линій, какъ въ случаѣ, если бы онѣ представляли движенія прямолинейныя.

Какъ только стало извѣстно, что всякое движеніе тѣла, укрѣпленнаго въ неподвижной точкѣ, есть вращательное движеніе около прямой линіи,—дознано было, что движеніе тѣла вполнѣ свободнаго можетъ быть въ каждый моментъ разложено на два другія: на общее всѣмъ точкамъ поступательное движеніе и на вращеніе около оси, проведенной черезъ одну изъ точекъ. Другими словами это значило, что при безконечно маломъ движеніи совершенно свободнаго тѣла можно черезъ каждую его точку провести прямую, которая впродолженіе этого движенія остается параллельна самой себѣ.

Легко замѣтить, что всѣ такія прямыя между собою также параллельны и что *одна изъ нихъ перемѣщается по своему собственному направленію*; это показываетъ, что движеніе тѣла тождественно съ движеніемъ винта въ гайкѣ [309]).

Вотъ, кажется, все, что сдѣлано въ теоріи вращательныхъ движеній. Можетъ показаться удивительнымъ, что послѣ изученія движенія свободнаго твердаго тѣла, имѣющаго вращательное движеніе около одной оси, никто не остановился на случаѣ, когда тѣло имѣетъ нѣсколько вращательныхъ движеній около различныхъ осей, и на сложеніи такихъ вращеній.

Рѣшеніе этого вопроса оказалось необходимымъ на первыхъ же шагахъ въ излагаемыхъ нами здѣсь теоріяхъ. Мы нашли, что, *если тѣло имѣетъ нѣсколько вращательныхъ движеній около различныхъ осей, размѣщенныхъ*

---

[309]) Я уже изложилъ эту теорему вмѣстѣ съ другими, касающимися перемѣщенія свободнаго твердаго тѣла въ пространствѣ. См. *Bulletin universel des sciences*, t. XIV, p. 321, 1830 и *Correspondance* de Quetelet, t. VII, p. 352.

какимъ бы то ни было образомъ въ пространствѣ, то эту систему вращеній всегда можно замѣнить, и притомъ до безконечности разнообразно, двумя вращеніями около двухъ различныхъ осей.

Одна изъ осей можетъ быть взята въ безконечности; это показываетъ, что дѣйствительное движеніе тѣла есть вращеніе около второй оси, которая перемѣщается по своему собственному направленію. Выводъ этотъ согласенъ съ тѣмъ, который мы только что получили изъ разсмотрѣнія прямолинейныхъ движеній точекъ тѣла.

Сложеніе системы вращеній около нѣсколькихъ осей очень просто и при этомъ сохраняется найденная Лагранжемъ аналогія между сложеніемъ вращеній около нѣсколькихъ осей, проходящихъ черезъ неподвижную точку, и сложеніемъ прямолинейныхъ движеній точки. На каждой оси откладываемъ линію пропорціональную вращенію около этой оси и всѣ такія линіи разсматриваемъ какъ силы, приложенныя къ твердому тѣлу. По сложеніи эти силы приведутся къ двумъ, направленія которыхъ представятъ оси двухъ вращеній, замѣняющихъ собою данную систему вращеній, по величинѣ же два вращенія выразятся величинами составныхъ силъ.

Предположимъ теперь, что вращенія тѣла около различныхъ осей суть вращенія плоскостей, проходящихъ черезъ эти оси, подобно тому, какъ прямолинейныя движенія, сообщенныя тѣлу, или силы, на него дѣйствующія, разсматриваются, какъ приложенныя къ точкамъ тѣла, находящимся на направленіи этихъ движеній или силъ.

Каждая изъ плоскостей, во время дѣйствительнаго движенія тѣла, обращается сама около себя и вокругъ прямой, находящейся въ самой плоскости (эта прямая во время движенія тѣла не выходитъ изъ первоначальнаго положенія плоскости, но вращается въ ней около неподвижной точки). Вращательное движеніе плоскости около самой себя мы назовемъ ея *дѣйствительнымъ вращеніемъ (rotation effective)*, частное же вращеніе тѣла около оси, лежащей въ этой плос-

кости,—*вращеніемъ сообщеннымъ* плоскости (*rotation imprimée*); такимъ образомъ *дѣйствительное* вращеніе плоскости слагается изъ *сообщеннаго* ей вращенія и изъ вращеній, сообщенныхъ другимъ плоскостямъ тѣла.

Условившись въ этихъ обозначеніяхъ, получаемъ слѣдующую теорему.

Пусть твердое тѣло находится подъ вліяніемъ нѣсколькихъ одновременныхъ вращеній около различныхъ осей; представимъ себѣ плоскости, проведенныя въ тѣлѣ черезъ оси вращеній; каждая изъ этихъ плоскостей будетъ имѣть свое дѣйствительное вращеніе.

Если составимъ произведеніе изъ дѣйствительнаго вращенія каждой плоскости, изъ сообщеннаго ей вращенія и изъ косинуса угла между осями этихъ двухъ вращеній, то сумма такихъ произведеній будетъ оставаться постоянна, каковы бы ни были плоскости, проведенныя черезъ оси вращеній.

Это постоянное количество будетъ равно суммѣ квадратовъ сообщенныхъ вращеній, сложенной съ суммою произведеній этихъ вращеній попарно, умноженныхъ на косинусъ угла, образуемаго осями этихъ вращеній.

Если тѣлу, имѣющему нѣсколько вращеній, находящемуся въ покоѣ, сообщимъ безконечно малое перемѣщеніе, то плоскости, проведенныя черезъ оси вращеній, получатъ дѣйствительныя вращенія, которыя мы назовемъ *возможными* (*virtuelles*) вращеніями.

Условіе равновѣсія тѣла можно выразить посредствомъ уравненія, представляющаго *начало возможныхъ вращеній*, соотвѣтственное началу *возможныхъ скоростей*. Начало это выразится такъ:

Представимъ себѣ твердое тѣло, различныя плоскости котораго имѣютъ вращенія около осей, помѣщенныхъ въ этихъ плоскостяхъ; сообщимъ тѣлу какое угодно безконечно—малое перемѣщеніе и составимъ для каждой плоскости произведеніе сообщеннаго ей вращенія на дѣйствительное ея вращеніе и на косинусъ угла, образуемаго осями этихъ двухъ вращеній; для

равновѣсія данной системы вращеній необходимо и достаточно, чтобы сумма всѣхъ этихъ произведеній была равна нулю.

Сказаннаго достаточно, чтобы понять, въ какомъ смыслѣ въ раціональной механикѣ могутъ быть созданы новыя теоріи посредствомъ замѣны въ существующихъ теоріяхъ по отношенію къ движенію тѣлъ—движеній прямолинейныхъ—вращательными, по отношенію же къ самимъ тѣламъ—*точекъ—плоскостями*, какъ это дѣлается въ чистой геометріи и въ геометріи аналитической [310]).

7. Не будемъ касаться вопроса, могутъ ли подобныя новыя теоріи съ пользою прилагаться къ вопросамъ практической и физической астрономіи; противъ этого можно, кажется, возражать *a priori*, ибо весьма вѣроятно, что употребительные аналитическіе пріемы, основывающіеся на Декартовомъ способѣ координатъ, соотвѣтствуютъ скорѣе существующимъ, нежели новымъ, теоріямъ; но, мы думаемъ, нельзя отвергать по крайней мѣрѣ того, что введеніе этихъ новыхъ ученій въ раціональную механику можетъ бросить новый свѣтъ на всю обширную ея область и на многіе частные вопросы, до сихъ поръ еще не вполнѣ изслѣдованные. Укажемъ, напримѣръ, на любопытную аналогію между силами и моментами ихъ относительно неподвижной точки,—аналогію, такъ ясно выражающуюся въ теоріи паръ. Въ динамикѣ такое же соотвѣтствіе встрѣчается снова между прямолинейными движеніями и ихъ моментами относительно точки; точно также—въ двухъ началахъ сохраненія движенія центра тяжести и площадей; Бине обнаружимъ тоже самое въ началѣ живыхъ силъ; безъ сомнѣнія соотвѣтствіе это идетъ

---

[310]) Эта теорія *вращательныхъ движеній* необходимо должна войти въ ту новую отрасль механики, которую Амперъ включилъ въ свою классификацію человѣческихъ знаній подъ именемъ *кинематики* (наука о движеніи), какъ науку, предшествующую статикѣ и обнимающую вмѣстѣ съ нею все содержаніе элементарной механики (См. *Essai sur la philosophie des sciences*, par Ampère, in—8,°1834).

еще дальше и его первоначальная, теперь еще неизвѣстная, причина есть вопросъ, имѣющій глубокій интересъ.

Упомянутая нами теорія паръ кажется намъ ученіемъ, вполнѣ согласнымъ съ развиваемою нами мыслію о соотвѣтствіи. Можно сказать, что это—статика, излагаемая безпристрастно по отношенію къ двумъ указываемымъ нами динамическимъ воззрѣніямъ. Дѣйствительно, пары повсюду играютъ такую же роль, какъ и простыя силы; послѣднія кажутся назначенными для поступательнаго движенія, какъ пары—для вращательнаго: тѣ и другія подчиняются одинаковымъ математическомъ законамъ сложенія и разложенія. Мы можемъ поэтому смотрѣть на изящную теорію паръ, какъ на ученіе въ высшей степени удачное и считать его необходимымъ введеніемъ въ полную теорію той двойственной динамики, о которой только что говорили.

7. Послѣ того, какъ мнѣ пришло на мысль разсматривать вращательныя движенія подобно поступательнымъ и связать этотъ вопросъ съ *двойственностью* формъ пространства, я прочелъ превосходныя размышленія моего товарища по политехнической школѣ Огюста Конта по поводу теоріи паръ Пуансо, высказанныя въ четырехъ урокахъ *Курса позитивной философіи*, въ которыхъ говорится о механикѣ. Мнѣ чрезвычайно было лестно видѣть, что мои идеи объ этомъ предметѣ подтверждаются мнѣніями этого глубокаго мыслителя какъ вообще о движеніи тѣлъ, такъ и о пользѣ теоріи паръ въ вопросахъ, сюда относящихся.

Закончу это Примѣчаніе собственными словами Огюста Конта, такъ какъ они способны обратить вниманіе геометровъ на новыя ученія, которыя можно ввести въ Динамику.

„Въ самомъ дѣлѣ, каковы бы ни были основныя качества «мысли Пуансо по отношенію къ статикѣ, нельзя по край«ней мѣрѣ не признать, кажется, что эта мысль по суще«ственному характеру своему назначена для усовершенство«ванія динамики, и по этому поводу я могу, кажется, утвер«ждать, что эта мысль до сихъ поръ еще не оказала сво«его наиболѣе важнаго вліянія. На нее надобно смотрѣть,

«какъ на мысль, прямо способствующую къ усовершенство-«ванію въ весьма важномъ пунктѣ самыхъ началъ общей «механики; благодаря ей *понятіе о вращательныхъ движе-«ніяхъ становится также естественно, также обыкновенно «и почти также просто, какъ и понятіе о движеніяхъ по-«ступательныхъ, потому что на пару можно смотрѣть какъ «на такой же естественный элементъ вращательнаго дви-«женія, какъ сила—въ движеніи поступательномъ*».

Когда Примѣчаніе это было уже написано, явилось небольшое сочиненіе Пуансо *Théorie nouvelle de la rotation des corps.* Въ этомъ сочиненіи осуществляются наши идеи о возможности и пользѣ ввести въ динамику прямое разсмотрѣніе вращательныхъ движеній, по образцу движеній поступательныхъ. Этотъ пріемъ авторъ прилагаетъ къ дѣлу съ замѣчательнымъ искуствомъ и разрѣшаетъ помощію его, путемъ простаго разсужденія, сложный и трудный вопросъ, поддававшійся до сихъ поръ только самому высшему анализу, и даетъ нѣсколько прекрасныхъ теоремъ, ускользавшихъ отъ анализа и представляющихъ ясную картину всѣхъ обстоятельствъ вращательнаго движенія тѣлъ.

Конецъ.

СОДЕРЖАНІЕ ПЕРВАГО ТОМА.

СОДЕРЖАНІЕ ВТОРАГО ТОМА.
